

Aufgabe 1: Kreuzprodukte

Wir definieren die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie

$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{c} \times \vec{d}, \quad \vec{d} \times \vec{a}, \quad \vec{b} \times \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}.$$

b) Schwieriger: multiple Produkte

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Aufgabe 2: Skalar- und Kreuzprodukt

Sei $\vec{a}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Wir orientieren das Koordinatensystem so, dass die z Achse senkrecht auf $\vec{a}$ liegt, d.h. $\vec{e}_z \cdot \vec{a} = 0$, oder $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)^T$. Der Vektor $\vec{b} = R\vec{a}$ wird nun durch Rotation von $\vec{a}$ mit der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt, d.h. durch Drehung um ϕ um die z Achse.

a) Zeigen Sie explizit, dass

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T R \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos \phi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi.$$

b) Zeigen Sie explizit, dass

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_z |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi.$$

Aufgabe 3: Winkel im Raum

Zwei Geraden sind parameterisiert durch

$$g_1 : \vec{a} + \lambda \vec{v} \quad , \quad g_2 : \vec{a} + \mu \vec{w} \quad .$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -17 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Offensichtlich schneiden sich die beiden Geraden im Punkt $\vec{a}$. Welcher Winkel ist zwischen g_1 und g_2 ?

Aufgabe 4: Lineare Abhängigkeit

Welche Kombinationen von drei aus den vier folgenden Vektoren ist linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 5: Drehmatrizen

Die folgenden drei Matrizen drehen einen 3-dimensionalen Vektor um die x , y , und z Achse:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad ,$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Suchen Sie sich eine Matrix R_i aus und berechnen Sie

$$R_i^T R_i \quad , \quad R_i R_i^T \quad .$$