

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation

Berechnen Sie jeweils die Matrix $C = A \cdot B$.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Länge (Norm) der Vektoren

Berechnen Sie die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Zerlegung eines Vektors

Es sei

$$\vec{v} = \alpha \vec{n} + \vec{v}_\perp .$$

Wie müssen Sie α wählen, damit $\vec{v}_\perp$ senkrecht auf $\vec{n}$ steht?

Tipp: Nehmen Sie das Skalarprodukt der obigen Gleichung mit $\vec{n}$, und lösen Sie nach α auf. Sie sollten erhalten:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \underbrace{\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}}_{\alpha} \vec{n}$$

Aufgabe 4: Skalarprodukte

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{v} \cdot \vec{w}$ mit

$$\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 5: Matricelemente

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und die Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bzw.

$$\vec{e}_1^T = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{e}_2^T = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{e}_3^T = (0, 0, 1) .$$

a) Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$\vec{e}_1^T A \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_3^T A \vec{e}_1 ,$$

und verallgemeinern Sie auf $\vec{e}_i^T A \vec{e}_j$, mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

b) Was sind

$$\vec{e}_1^T A \quad , \quad \vec{e}_2^T A \quad , \quad \vec{e}_3^T A ?$$

c) Berechnen Sie die Matrizen

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1^T \quad , \quad \vec{e}_2 \vec{e}_2^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \vec{e}_i^T = \vec{e}_1 \vec{e}_1^T + \vec{e}_2 \vec{e}_2^T + \vec{e}_3 \vec{e}_3^T$$