

Aufgabe 1: Cramersche Regel

Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Lösung für x nach der Cramerschen Regel.
- b) Berechnen Sie die Lösung für z nach der Cramerschen Regel.

Aufgabe 2: Zeilenstufenform und Determinante

Wir wollen in dieser Aufgabe nur eine Art elementarer Zeilenumformung benutzen, nämlich das Ersetzen einer Zeile Z_i durch $Z_i + \lambda Z_j$, d.h. die Addition eines Vielfachen der j -ten Zeile.

Bringen Sie damit die folgenden Matrizen in Zeilenstufenform und berechnen Sie nach jedem Schritt die Determinante erneut.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Wenn Sie in Aufgabenteil a) die zweite Zeile Z_2 durch $\frac{1}{3}Z_2 - Z_1$ ersetzen, erhalten Sie auch eine Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

Was ist deren Determinante, und wie vergleicht sie sich mit dem Ergebnis aus a)?

Aufgabe 3: Permutationen

Geben Sie alle Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$ an. Überlegen Sie sich eine systematische Methode, um auch wirklich alle Permutationen zu finden. Wie viele gibt es?