

## Aufgabe 1: Integration

Geben Sie eine Stammfunktion der folgenden Integranden an:

- a)  $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ,
- b)  $f(x) = A \cos(kx + \alpha)$ ,
- c)  $f(x) = 1/x^3$ ,
- d)  $f(x) = x \exp(-x^2)$ . *Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Problem  $f(x) = \exp(g(x))g'(x)$ , dann erkennen Sie bestimmt, wie's geht.*

## Aufgabe 2: Stammfunktion von $f'/f$

Wir suchen eine Stammfunktion  $F(x)$  zum Integranden  $f'(x)/f(x)$ , d.h.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{z.B.} \quad \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Sie mögen geraten haben, daß  $F(x)$  vielleicht  $\ln(f(x))$  sein könnte. Doch was, wenn die Funktionswerte  $f(x)$  zufällig *negativ* sind?

- a) Nehmen Sie an,  $f(x) > 0$  sein positiv definit. Zeigen Sie, daß  $\ln(f(x))$  tatsächlich eine Stammfunktion ist.
- b) Wieder  $f(x) > 0$ . Zeigen Sie, daß  $\ln(cf(x))$  mit  $c > 0$  wieder eine Stammfunktion ist.
- c) Nehmen Sie an,  $f(x) < 0$  in dem betrachteten Bereich. Zeigen Sie, daß eine korrekte Stammfunktion nun  $\ln(-f(x))$  ist.
- d) Argumentieren Sie nun dafür, daß

$$F(x) = \ln(|cf(x)|) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

alle Eventualitäten abdeckt.

*bitte wenden*

### Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechnen Sie durch partielle Integration die folgenden Integrale, und bestimmen Sie eine Stammfunktion. Testen Sie jeweils, ob die Stammfunktion die richtige Ableitung besitzt.

- a) Setzen Sie  $f'(x) = 1$  und  $g(x) = \ln^2(x)$ :

$$\int_a^b \ln^2(x) dx = \int_a^b 1 \cdot \ln^2(x) dx .$$

- b) Welche der zwei folgenden Strategien führt zum Erfolg?

$$\int_a^b \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^{kx}}_g dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b \underbrace{x}_g \underbrace{e^{kx}}_{f'} dx$$

- c) Für Begeisterte oder solche, die es werden wollen: Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{\pi} \cos(x) \cos(2x) dx$$

indem Sie es *zweimal in der selben Richtung* partiell integrieren. Sie erhalten eine Gleichung, die nur richtig sein kann, wenn  $I = 0$  ist, z.B.  $I = 4I$ .

### Aufgabe 4: Substitution

In Anlehnung an **Aufgabe 1 d)** berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx ,$$

indem Sie  $y = x^2$  substituieren.