Übungen zum Vorkurs Mathematik

vor dem Sommersemester

Dr. Björn O. Lange **Modul A**

Blatt 1 — Ausgabe: jetzt — Abgabe: keine

Aufgabe 1: Reihen

(i) Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9} + \dots$

b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

c) $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \dots$

(ii) Schreiben Sie die ersten sechs Glieder der folgenden Reihen aus.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$

Aufgabe 2: geometrische Reihen und Summen

Berechnen Sie die folgenden Reihen bzw. Summen

a)
$$1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

b)
$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$$

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n}$$

d)
$$\sum_{n=0}^{9} \frac{2^n}{4^n}$$

e)
$$\sum_{n=0}^{9} \frac{4^n}{2^n}$$

bitte wenden

Aufgabe 3: Konvergenzgeschwindigkeit

Sie haben in der Vorlesung eine Reihe und eine Folge kennengelernt, die beide gegen den Wert $e = 2.71828\ldots$ konvergieren. Benutzen Sie ihre Taschenrechner, um die folgenden Werte (hier ist runden O.K.) zu berechnen:

a) $$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$$, d.h. nur die ersten sieben Glieder der Reihe

b) $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{für} \qquad n = 7,\ n = 100,\ \text{und}\ n = 1000$$

Was, glauben Sie, konvergiert schneller? (Beide sind monoton wachsend.)

Aufgabe 4: $\varepsilon - N$ Formulierung

Hier benötigen Sie wieder einen Taschenrechner: Die Folge $\{c_n\}$ mit

$$c_n = \frac{7 + 3n^2}{1 + 2n^2} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c = \frac{3}{2}$$

konvergiert gegen $3/2$. Für $\varepsilon = 0.02$ finden Sie das kleinste N aus den positiven ganzen Zahlen, für das $|c_N - c| < \varepsilon$ ist. Wie groß wäre N für $\varepsilon = 0.01$?

Aufgabe 5: Fibonacci Folge

Die Fibonacci Folge $\{a_n\}$ kann rekursiv durch $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ und die Anfangswerte a_0 und a_1 definiert werden. Für beispielsweise $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ lautet die Folge

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}\ .$$

Wir setzen nun $a_n = q^n$, d.h. $a_0 = 1, a_1 = q$. Finden Sie die Lösungen für q, die sowohl der Fibonacci Gleichung $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ als auch der geometrischen Form $a_n = q^n$ genügen. (Dies ist der “Goldene Schnitt”.)