Grundlage : Axiome

Wir besprechen nochmal die Erweiterungen

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \ldots$$

Def: Nachfolger, natürlichen Zahlen, Einselement mit folgenden Eigenschaften:

(N1) Das Einselement ist eine natürliche Zahl.

(N2) Zu jeder natürlichen Zahl ist der Nachfolger ebenfalls eine natürliche Zahl.

(N3) Das Einselement tritt <u>nicht</u> als Nachfolger einer natürlichen Zahl auf.

(N4) Zwei natürliche Zahlen, die denselben Nachfolger haben, sind gleich.

(N5) Enthält eine Menge natürlicher Zahlen das Einselement und zu jedem Element auch ihren Nachfolger, so beinhaltet die Menge <u>alle</u> natürlichen Zahlen.

Def:

* Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
* Das Einselement wird mit 1 bezeichnet.
* Der Nachfolger von 1 wird mit 2 bezeichnet,
  —— " —— 2 —— " —— 3 " ,
  etc.

Def: Sei M eine Menge, die $\mathbb{N}$ enthält, $\mathbb{N} \subseteq M$.
Je zwei Elementen aus M, $x, y \in M$, sei
eine <u>Summe</u> $x + y \in M$, und ein <u>Produkt</u>
$x \cdot y \in M$ zugeordnet, so daß für alle $x, y, z \in M$ gilt:

„Ring“

(R1) Im Fall $x \in \mathbb{N}$ ist $x+1$ der Nachfolger von x.

(R2) $x + (y+z) = (x+y) + z$ (Assoziativität der Addition)

(R3) $x \cdot 1 = x$ (Neutralität der Eins)

(R4) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)

„auf M sind Addition und Multiplikation definiert“.

Satz: Auf $\mathbb{N}$ sind Addition und Multiplikation eindeutig.

Bsp:

$\hookrightarrow$ $3 + 1 = 4$

$\hookrightarrow$ $3 + 2 = 3 + (1+1) = (3+1) + 1 = 4 + 1 = 5$

$\hookrightarrow$ $3 + 3 = 3 + (2+1) = (3+2) + 1 = 5 + 1 = 6$

und $3 \cdot 2 = 3 \cdot (1+1) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 1) = 3 + 3 = 6$

Def: Man definiert die Menge $\mathbb{Q}$ (und die Menge $\mathbb{Z}$), ein <u>Nullelement</u> $0 \in \mathbb{Q}$, sowie zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ die <u>Gegenzahl</u> $-x$ und für $x \neq 0$ den <u>Kehrwert</u> $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, so daß

Körperaxiome:

(K1) $x + (y+z) = (x+y) + z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$

(K2) $x + 0 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$

(K3) $x + (-x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$

(K4) $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$

(K5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$

(K6) $x \cdot 1 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$

(K7) $x \cdot x^{-1} = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

(K8) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$

(K9) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(Z) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(Q) $\mathbb{Q} = \{x \cdot y^{-1} \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{N}\}$

↳ Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen „ganze Zahlen"

↳ —"— $\mathbb{Q}$ —"— „rationale Zahlen"

↳ Def. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Sind $x, y \in \mathbb{Q}$, schreibe | $x - y$ für $x + (-y)$
| $\frac{x}{y}$ für $x \cdot y^{-1}$

Satz: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x + y = y$. Dann muß $x = 0$ gelten.

Beweis (Nur mit Körperaxiomen):

$$x \underset{(K2)}{=} x + 0 \underset{(K3)}{=} x + (y + (-y)) \underset{(K1)}{=} (x+y) + (-y)$$

laut Voraussetzung $x + y = y$ gilt:

$$x = y + (-y) \underset{(K3)}{=} 0$$

Satz: Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$x \cdot y = 0$ äquivalent zu ($x = 0$ oder $y = 0$)

Beweis 1) „$\Leftarrow$" (direkter Beweis)

Sei $x = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \cdot y \underset{(K2)}{=} (0+0) \cdot y \underset{(K9)}{=} (0 \cdot y) + (0 \cdot y)$

$\Rightarrow 0 \cdot y = 0 \cdot y + 0 \cdot y$ (Satz oben)

$\Rightarrow 0 \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$

Sei $y = 0 \Rightarrow x \cdot y \underset{(K8)}{=} y \cdot x = 0 \cdot x = 0$ (s.o.)

2) „$\Rightarrow$" (indirekter Beweis)

Sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

Nimm an, $x \cdot y = 0$. Weil $y \neq 0$ existiert y^{-1}, und

$$0 \underset{(s.o.)}{=} 0 \cdot y^{-1} \underset{(Ann.)}{=} (x \cdot y) \cdot y^{-1} \underset{(K5)}{=} x \cdot (y \cdot y^{-1}) \underset{(K7)}{=} x \cdot 1 \underset{(K6)}{=} x \neq 0$$

Widerspruch ☺

Diese letzten beiden Sätze gelten nicht nur für $\mathbb{Q}$, sondern immer, wenn die Körperaxiome auf einer Menge M erfüllt sind.

<u>Def</u>: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Man nennt $d \in \mathbb{Z}$ einen <u>Teiler</u> von n, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = k \cdot d$ existiert. Gibt es kein $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, das sowohl Teiler von m als auch Teiler von n ist, heißen m und n <u>teilerfremd</u>.

<u>Satz</u>: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte teilerfremde Zahlen $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{m}{n}$ (voll gekürzt!)

Reelle Zahlen

Ein „vollständig angeordneter Körper" ist eine Menge mit Addition, Multiplikation, Körperaxiome (K1 – K9) und Kleiner-Relation $<$, so daß

(A1) Es gilt entweder $x < y$, $x = y$, oder $y < x$

(Eindeutig)

(A2) Gilt $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$

(Transitivität)

(A3) Gilt $x < y$, so gilt auch $x + z < y + z$

(A4) Gilt $x < y$ und $0 < z$, so gilt $x \cdot z < y \cdot z$.

(V) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge besitzt eine größte untere Schranke (Infimum)

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge besitzt eine kleinste obere Schranke (Supremum)

<u>Satz</u>: Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = 2$.

<u>Beweisidee</u>: Benutzt wird die Vollständigkeit (V) für Mengen

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^2 > 2 \}$$

Dann gilt $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Es gibt ein Infinum von B (Supremum von A).

Das ist die gesuchte Zahl.