Übungen zum Vorkurs Mathematik

vor dem Sommersemester

Dr. Björn O. Lange **Modul G**

Blatt 2 — Ausgabe: jetzt — Abgabe: keine

Aufgabe 1: Direkter Beweis

a) Seien a, b natürliche Zahlen. Beweisen Sie, daß die Zahl $x = 10a + b$ genau dann durch 7 teilbar ist, wenn die Zahl $y = a + 5b$ durch 7 teilbar ist. (Sie müssen beide Richtungen zeigen!)

b) Sei ausserdem $z = a - 2b$. Beweisen Sie, daß x genau dann durch 7 teilbar ist, wenn z durch 7 teilbar ist.

c) Untersuchen Sie, ob die Zahlen 105, 1001, 23112, und 84938 durch 7 teilbar sind.

Bonus: Können Sie noch andere Kriterien für die Teilbarkeit durch 7 konstruieren?

Aufgabe 2: Direkter Beweis: Binomialkoeffizienten

Wir haben in der Vorlesung die Fakultät $n! = n(n-1)!$ und $0! = 1$ für alle natürlichen Zahlen n definiert. Ausserdem die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ ,$$

wobei k eine ganze Zahl zwischen 0 und n ist. Beweisen Sie die Konstruktion des Pascalschen Dreiecks, nämlich daß für $n > 1$ und $k > 1$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 3: Indirekter Beweis

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ mit p^2 teilbar durch 3. Dann ist auch p teilbar durch 3. *(Für den indirekten Beweis können Sie eine Fallunterscheidung machen, denn wenn p nicht durch 3 teilbar ist, muss der Rest entweder 1 oder 2 sein.)*

b) Beweisen Sie mit der Methode des indirekten Beweises, daß die Zahl $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl sein kann.

bitte wenden

Aufgabe 4: Vollständige Induktion

Üben Sie den vollständige Induktionsbeweis an einigen der folgenden Beispiele. Hierbei sei n eine natürliche Zahl.

a)

$$\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

e)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

f)

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = a^{n+1} - b^{n+1}$$

g)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Aufgabe 5: Satz von Euklid

Behauptung: Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen, also natürliche Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind. Beweisen Sie dies wiefolgt durch Widerspruch (indirekter Beweis):

- Nehmen Sie an, die Menge M der Primzahlen ist endlich, also $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$.
- Bilde die Zahl
$$k = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_N = \prod_{j=1}^{N} p_j \ .$$
- Die Zahl $k+1$ ist entweder eine Primzahl, die nicht in M enthalten ist, oder sie wird durch mindestens eine Primzahl, sagen wir p_i, geteilt. Im zweiten Fall wären sowohl k als auch $k+1$ teilbar durch p_i, und somit auch deren Differenz.