Vorlesung: Quantencomputing

Mittwochsakademie

angelehnt an

“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter

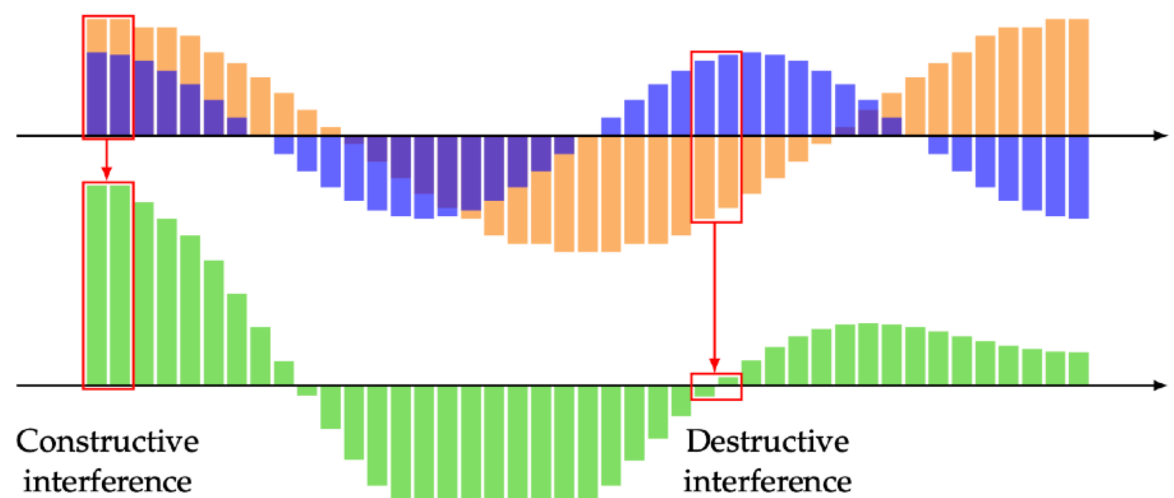
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

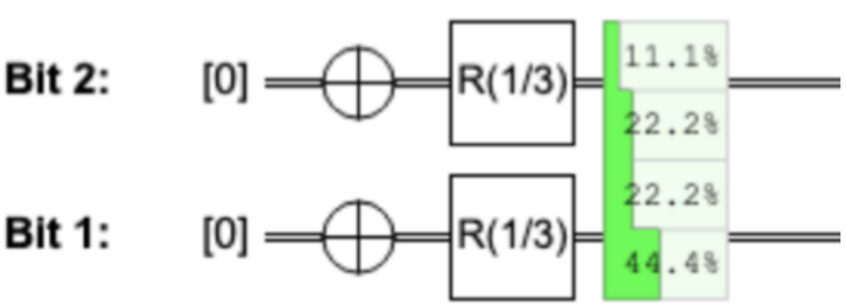
Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 3
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 1
28. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
4. 2.: Q5 Virtuose Algorithmen

Verabschiedung von Prof. Claus Grupen





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: $\hat{\text{NOT}}|0\rangle = |1\rangle \quad \hat{\text{NOT}}|1\rangle = |0\rangle$

Z-Operation: $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle \; \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$ **Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse**

Rotationen: $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = |\psi(\theta)\rangle$; $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = |\psi(\theta + \frac{\pi}{2})\rangle$

Allgemeinste Spiegelung $\hat{V}(\theta)$ **hat die Form:** $\hat{V}(\theta) = $ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

Hadamard Transformation $\hat{H}$ $\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = $ **NOT** $\hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$|+\rangle := \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) =: |+\rangle$$

$$|-\rangle := \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) =: |-\rangle$$

Wdh.: Kontrollierte Operationen

Man kann für jede Ein QuBit Operation $\hat{U}$ verallgemeinerte kontrollierte Operationen $C\hat{U}_{1\rightarrow 2}$ einführen:

$$
\begin{aligned}
CU_{1\rightarrow 2}\,|00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle\,, \\
CU_{1\rightarrow 2}\,|01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle\,, \\
CU_{1\rightarrow 2}\,|10\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|0\rangle\,, \\
CU_{1\rightarrow 2}\,|11\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|1\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man verschränkt

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Wir bestimmen wieder die Größe $\Delta(\psi) = \psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10}$

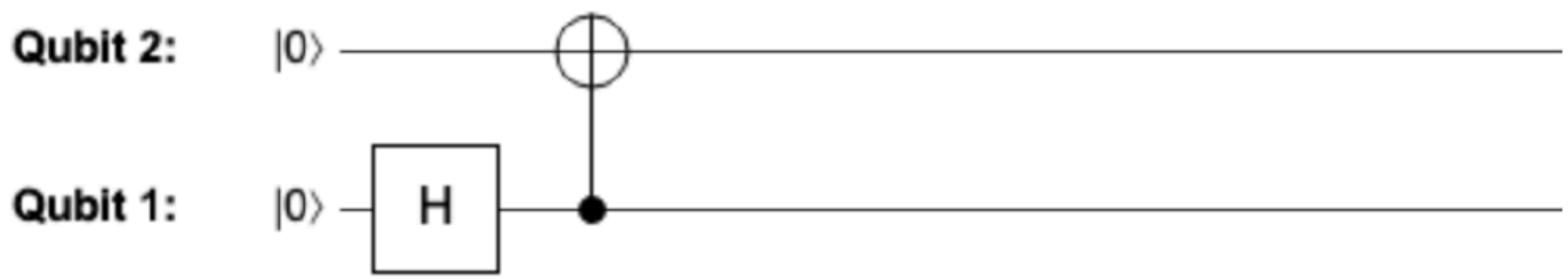
Es gilt: $|\psi\rangle$ **ist ein Produktzustand** $\Leftrightarrow \Delta(\psi) = 0$

Wdh.: Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

Erzeugung via Quirky:



Beweis:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)\,|00\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

$|\Phi^+\rangle$ **gehört zu einer Familie von 4 Zuständen die Bell-Zustände genannt werden**

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle,$$
$$\left|\Phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle.$$

Wir definieren folgende Operation: $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{N}}\textbf{OT}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$ **und finden**

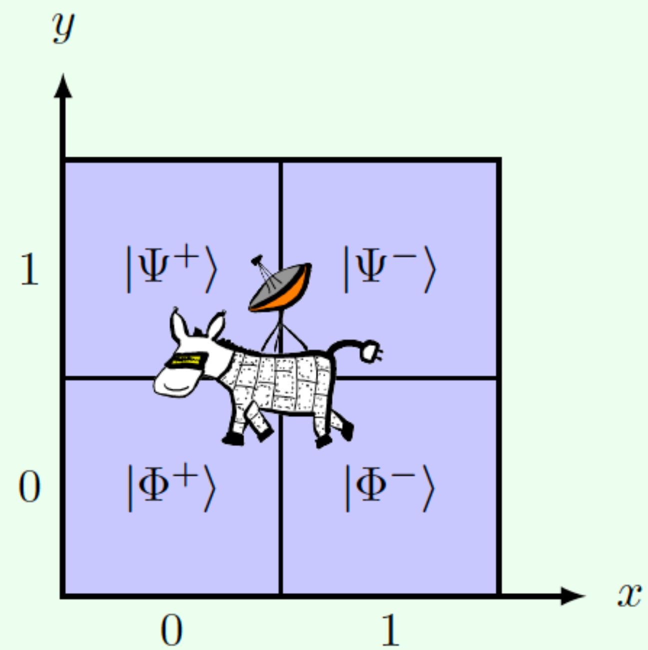
$$\left|\Phi^+\right\rangle = U_{\text{Bell}}\left|00\right\rangle, \qquad \left|\Phi^-\right\rangle = U_{\text{Bell}}\left|10\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^+\right\rangle = U_{\text{Bell}}\left|01\right\rangle, \qquad \left|\Psi^-\right\rangle = U_{\text{Bell}}\left|11\right\rangle.$$

$$\text{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)\left|00\right\rangle = \text{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

D.H.: Invertiere $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$

$$\hat{U}^{-1}_{\textbf{Bell}} := (\hat{H} \otimes \hat{1})C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}$$

$$\hat{H}|0\rangle = |+\rangle\,,\ \hat{H}|1\rangle = |-\rangle$$

$$\hat{H}^2|0\rangle = \hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|0\rangle) = |0\rangle$$

$$\hat{H}^2|1\rangle = \hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|1\rangle) = |0\rangle$$

Wdh.: Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle,$ **1. QuBit:** $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**

$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle,$ **1. QuBit:** $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**

$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle,$ **1. QuBit:** $\widehat{\text{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}0\}$ **an**

$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.$ **1. QuBit:** $\hat{Z}_1\,\widehat{\text{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}1\}$ **an**

Dann sendet Alice Ihr QBuit an Bob und der hat den gesamten Zustand und kann des gesamten Zustand extrahieren (Ü 3.13)

Wdh.: Die Macht von Verschränkung

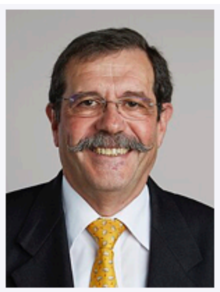
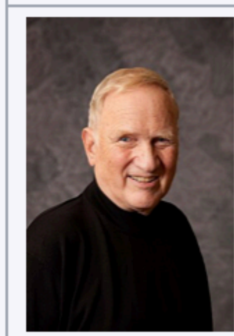
Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

QM: verletzt Bell-Ungleichung, mehr als 75%

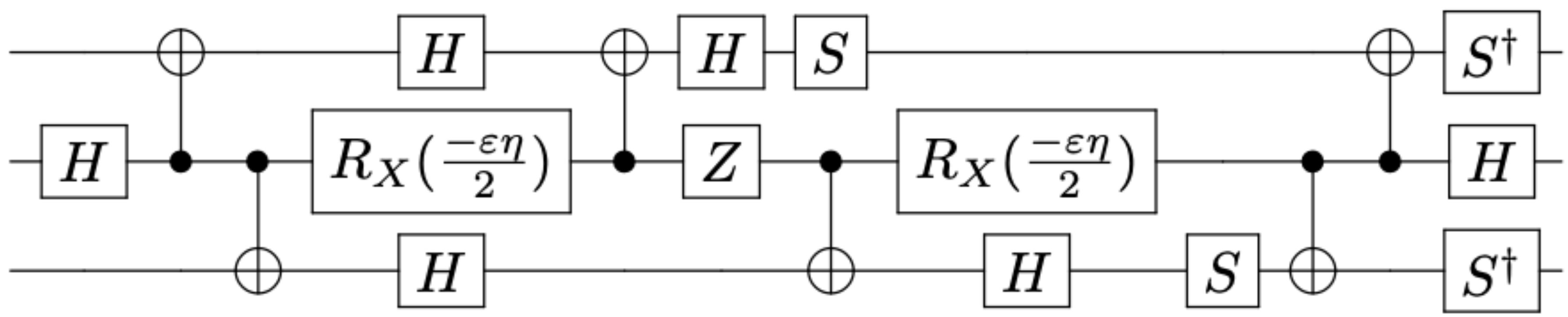
- dies ist experimentell bewiesen, z.B. Alan Aspect

2022		Alain Aspect (b. 1947)	French	"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"
		John Clauser (b. 1942)	American	
		Anton Zeilinger (b. 1945)	Austrian	

Kann auch als Beweis genutzt werden, dass man einen echten Quantencomputer hat!
Man spielt das Spiel und bei > 75% war es ein QC :-)

Wdh.: Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$
2. **Quantenoperationen: meist 1 oder 2 QuBits gleichzeitig involviert**
3. **Messungen, um QuBits auszulesen**

(Siehe Quirky)

Die Operationen werden oft auch als Gatter oder Gates bezeichnet

z.B.: Hadamard-Operation $\equiv$ Hadamard-Gatter $\equiv$ Hadamard-Gate

Wdh.: Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00\ldots00}\,|00\ldots00\rangle + \psi_{00\ldots01}\,|00\ldots01\rangle + \ldots + \psi_{11\ldots11}\,|11\ldots11\rangle$$

Es muss gelten:

$$\psi^2_{00\ldots00} + \psi^2_{00\ldots01} + \ldots + \psi^2_{11\ldots11} = 1$$

Mögliche Darstellung als Vektor in einem 2^n dimensionalen Vektorraum.

Bei $n = 300$ gibt es $2^{300} \approx 2 \cdot 10^{91}$ Amplitude (mehr als Atome im Universum) d.h. sowas kann nicht klassisch gespeichert werden, aber als Quanten Computer gebaut!

Wdh.: Viele Quantenbits

Mit dem Tensorprodukt können Zustände beschrieben werden, die zu kombinierten QuBits gehören, allgemein:

$$|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes |b_1, \ldots, b_m\rangle = |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle .$$

Beispiel 1: $|101\rangle \otimes |01\rangle = |10101\rangle$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
&|\Phi^+\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |11\rangle \\
&= \frac{1}{2}|0000\rangle + \frac{1}{2}|0011\rangle + \frac{1}{2}|1100\rangle + \frac{1}{2}|1111\rangle .
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.1: Tensorprodukt der Bell-Zustände

Berechne das Tensorprodukt $|\Phi^-\rangle \otimes |\Psi^-\rangle$ der zwei Bell-Zustände aus Gl. (3.53) und (3.55).

Wdh.: Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n\rangle = \hat{U} \,|\, a_1\rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n\rangle$$

Analoge Definitionen für $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$,...

Übungsaufgabe 4.2: Eine Ein-Qubit-Operation anwenden

Berechne das Ergebnis der Anwendung der Hadamard-Operation auf das zweite Qubit des Drei-Qubit-Zustands $|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle$. Anders gesagt, berechne $H_2\left(|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle\right)$. Schreibe dein Ergebnis in der Form aus Gl. (4.1).

$$|\,\Phi^+\rangle \otimes |\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,001\rangle + |\,111\rangle\right)$$

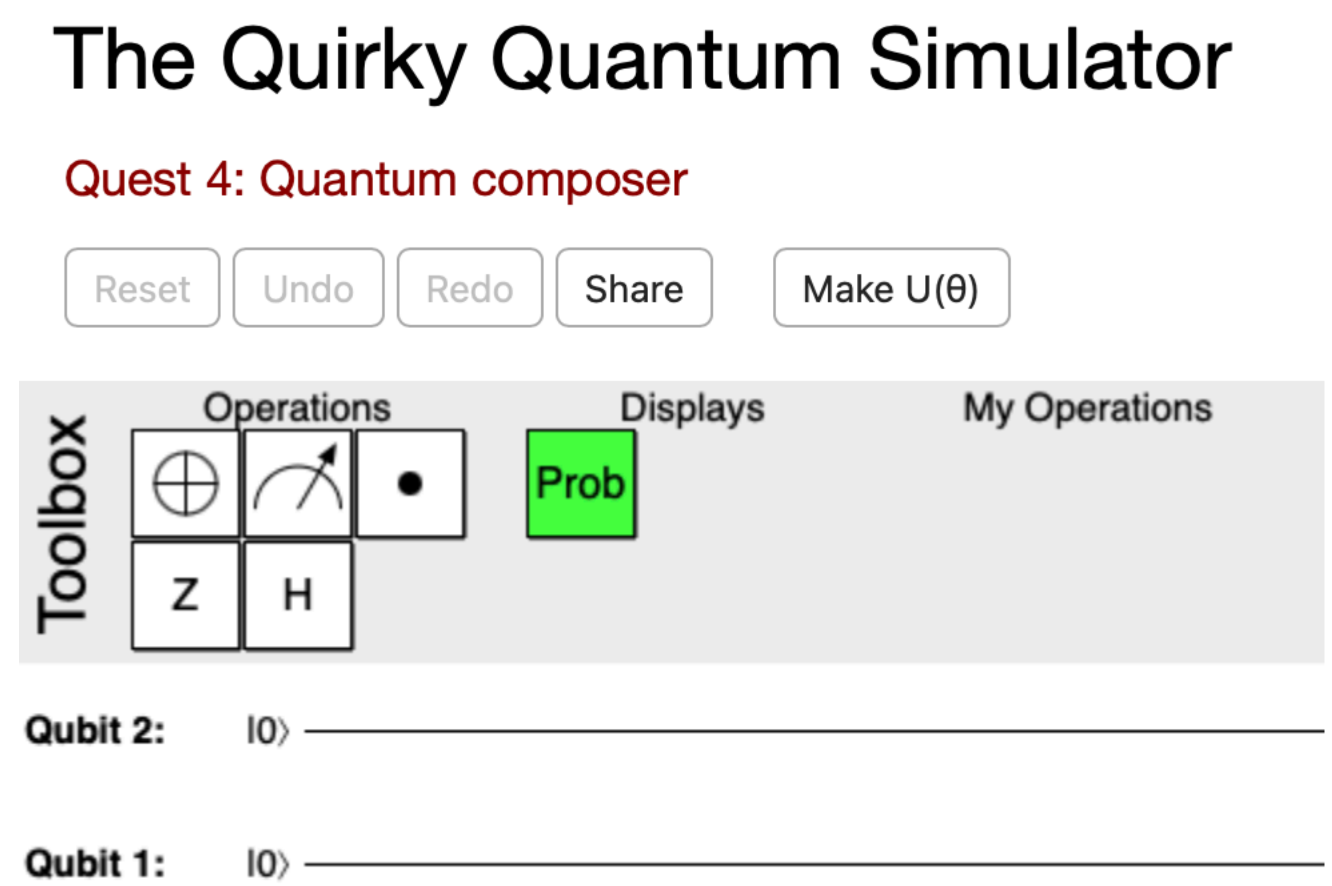
$$\hat{H}_2 \,|\,\Phi^+\rangle \otimes |\,1\rangle = \frac{1}{2}\left(|\,001\rangle + |\,011\rangle + |\,101\rangle - |\,111\rangle\right)$$

Wdh.: Operationen

2 QuBit-Operationen $\mathrm{C\hat{N}OT}_{i\to k}$ wirken wie folgt:

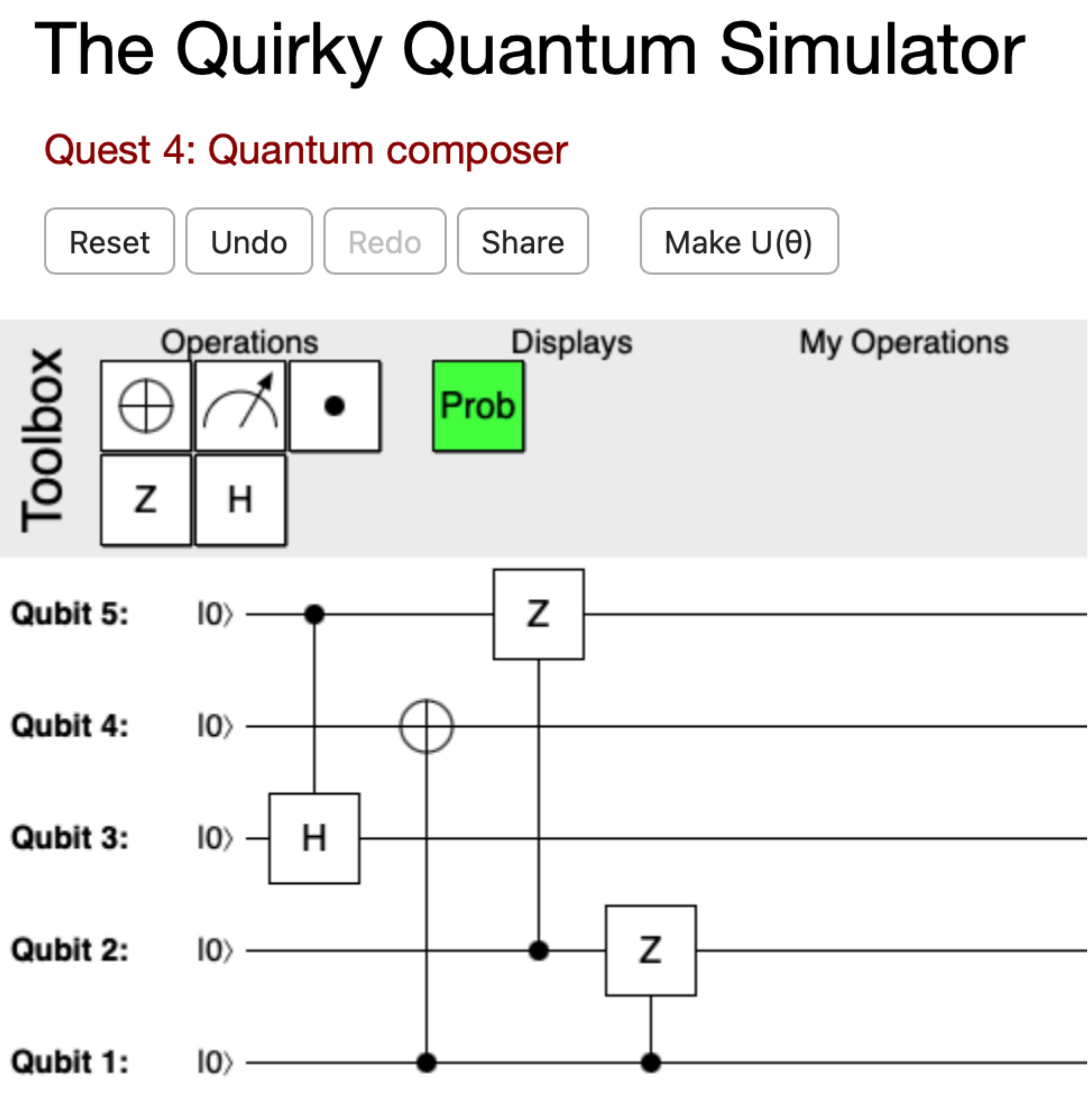
$$\mathrm{C\hat{N}OT}_{i\to k}\,|\,a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n\rangle = |\,a_1,\ldots,a_i \oplus a_k,\ldots,a_n\rangle$$

Quirky: Quest 4



Auf den ersten Blick: wie vorher
aber wenn man auf Operation klickt, dann erscheint 3. Linie

Wdh.: Operationen

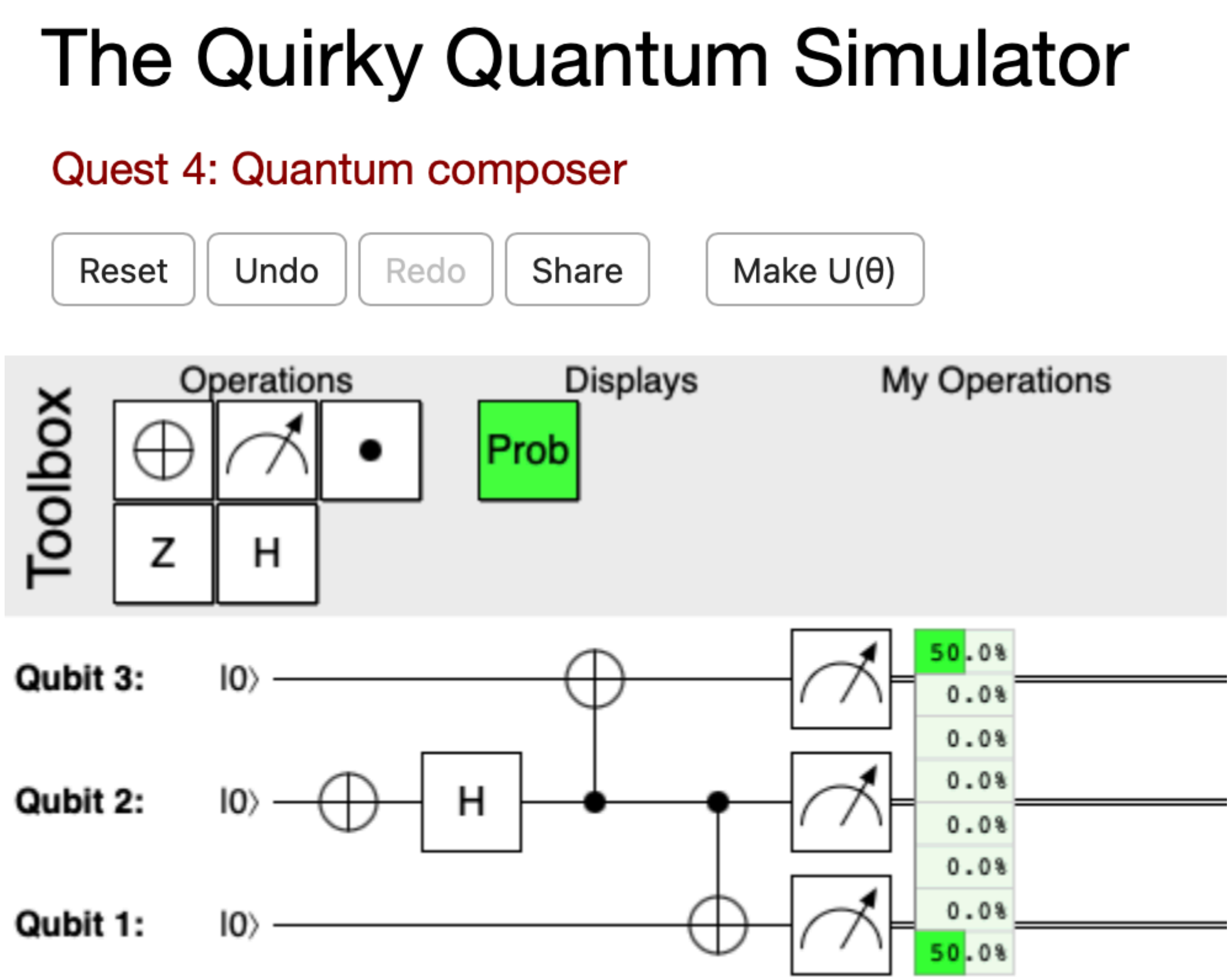


Wdh.: Operationen

Übungsaufgabe 4.3: Versetzte Tensorprodukte

Betrachte den Drei-Qubit-Zustand $(\mathrm{CNOT}_{2\to1} \otimes I)(|0\rangle \otimes |\Phi^-\rangle)$.

1. Wie kannst du diesen Zustand mit QUIRKY erstellen?
2. Schreibe den Zustand in der Form aus Gl. (4.1).



$$\widehat{\mathrm{CNOT}}_{2\to1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |011\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |111\rangle\right)$$

Wdh.: Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**
2. **Sie bildet Quantenzustände auf Quantenzustände ab (Normierung)**
3. **Sie ist invertierter (reversibel)**

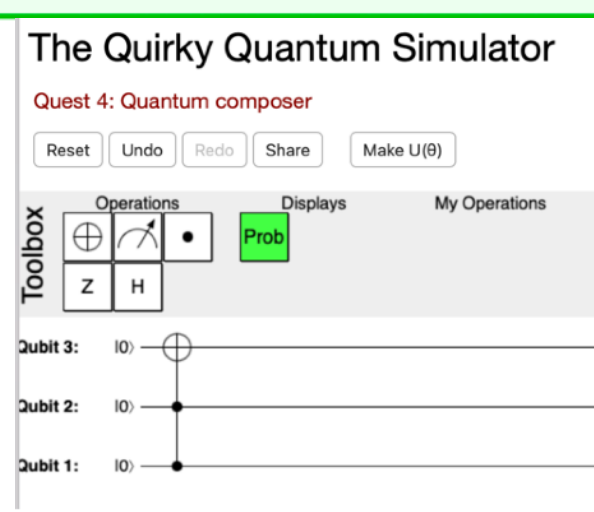
Übungsaufgabe 4.4: Toffoli **CCNOT**

Definiere die Toffoli-Operation auf drei Qubits durch

$$T\,|a,b,c\rangle = |a,b,c \oplus ab\rangle$$

auf Basiszuständen (ab ist dabei das Produkt der zwei Bits $a, b \in \{0,1\}$, und $\oplus$ wurde in Gl. (3.20) definiert), und erweitere sie durch Linearität auf beliebige Drei-Qubit-Zustände. Zeige, dass T alle Quantenzustände auf Quantenzustände abbildet, und dass T invertierbar ist.

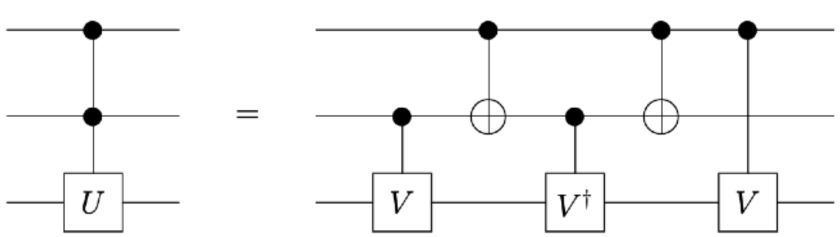
Bemerkung: T invertiert das dritte Bit genau dann, wenn beide ersten Bits beide eins sind – es ist also eine "zweifach-kontrollierte"-NOT-Operation.



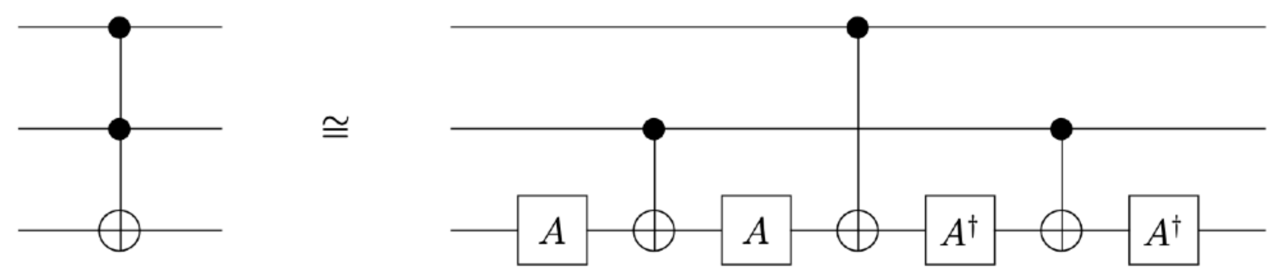
Wdh.: Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!
https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9503016

Lemma 6.1: *For any unitary 2×2 matrix U, a $\wedge_2(U)$ gate can be simulated by a network of the form*



where V is unitary.



where $A = \mathrm{R_y}(\frac{\pi}{4})$. In the above, the "$\cong$" indicates that the networks are not identical, but differ at most in the phases of their amplitudes, which are all ± 1 (the phase of the $|101\rangle$ state is reversed in this case).

Jede Quanten-Operation auf n QuBits kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!

Wdh.: Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.
$$H|+\rangle = |0\rangle, \qquad H|-\rangle = |1\rangle.$$
2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \mathrm{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\mathrm{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{Z}|+\rangle = \hat{H}|-\rangle = |1\rangle = \hat{\mathbf{NOT}}|0\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\hat{Z}|-\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \hat{\mathbf{NOT}}|1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{\mathbf{NOT}}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{\mathbf{NOT}}|+\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \hat{Z}|0\rangle$$

$$\hat{H}\hat{\mathbf{NOT}}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\hat{\mathbf{NOT}}|-\rangle = -\hat{H}|-\rangle = -|1\rangle = \hat{Z}|1\rangle$$

Wdh.: Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

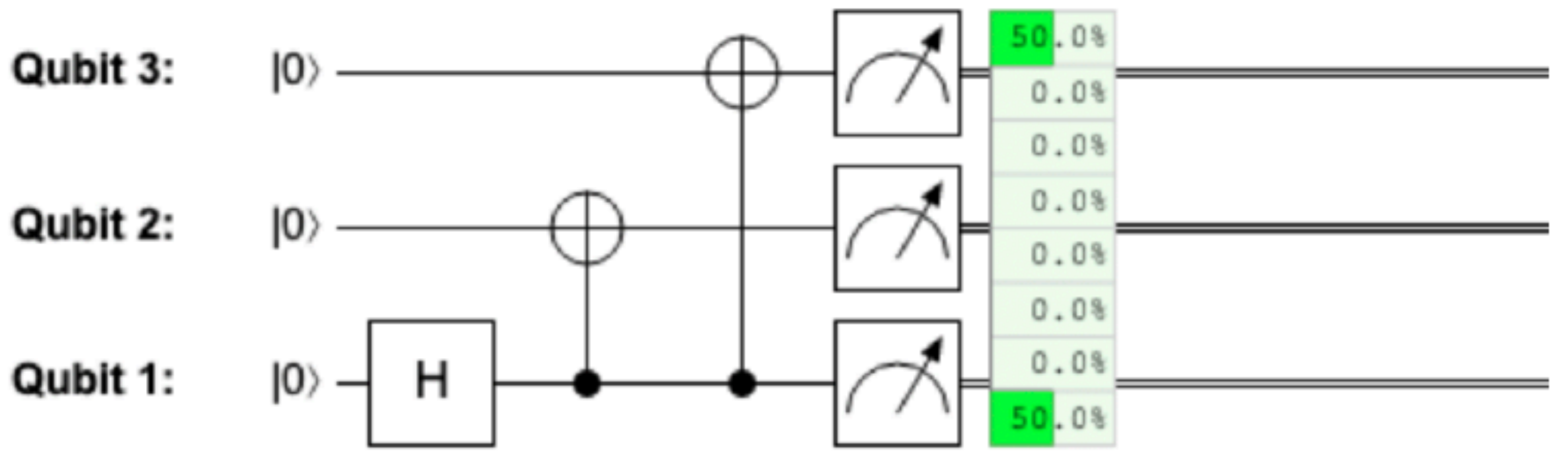
Definition: $\hat{V}(\theta) = \widehat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\widehat{\mathbf{NOT}}$

$$\hat{V}(\theta_2)\hat{V}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\,\widehat{\mathbf{NOT}}\,\widehat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\hat{U}(\theta_1) = \hat{U}(\theta_1 - \theta_2)$$

Wdh.: Alle Qubits messen

Wenn wir n QuBits messen dann erhalten wir mit der Wahrscheinlichkeit $p_{a_1....a_n} = \psi^2_{a_1....a_n}$ den Bit-String $a_1 \ldots . a_n$

Quirky



$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

Wdh.: Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

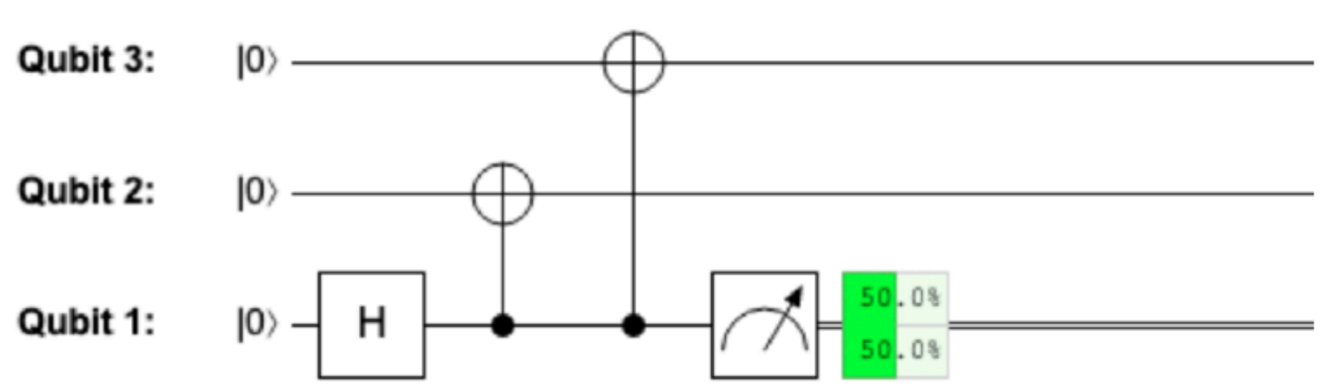
Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle +|\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Quirky:



$$\textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 3}\textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 2}\hat{H}_1|000\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 3}\textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 2}|000\rangle + \textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 3}\textbf{CN}\hat{\textbf{O}}\textbf{T}_{1\to 2}|100\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right)$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}\,|a00\rangle + \psi_{a01}\,|a01\rangle + \psi_{a10}\,|a10\rangle + \psi_{a11}\,|a11\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|a00\rangle + \psi_{a01}|a01\rangle + \psi_{a10}|a10\rangle + \psi_{a11}|a11\rangle$$

Nach der Messung des 1. QuBits können wir dies auch weglassen

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|00\rangle + \psi_{a01}|01\rangle + \psi_{a10}|10\rangle + \psi_{a11}|11\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|a00\rangle + \psi_{a01}|a01\rangle + \psi_{a10}|a10\rangle + \psi_{a11}|a11\rangle$$

Nach der Messung des 1. QuBits können wir dies auch weglassen

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|00\rangle + \psi_{a01}|01\rangle + \psi_{a10}|10\rangle + \psi_{a11}|11\rangle$$

Jetzt müssen wir noch sicherstellen, dass dieser Zustand auch normiert ist

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|a00\rangle + \psi_{a01}|a01\rangle + \psi_{a10}|a10\rangle + \psi_{a11}|a11\rangle$$

Nach der Messung des 1. QuBits können wir dies auch weglassen

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|00\rangle + \psi_{a01}|01\rangle + \psi_{a10}|10\rangle + \psi_{a11}|11\rangle$$

Jetzt müssen wir noch sicherstellen, dass dieser Zustand auch normiert ist

$$|\psi\rangle = \frac{\psi_{a00}}{c}|00\rangle + \frac{\psi_{a01}}{c}|01\rangle + \frac{\psi_{a10}}{c}|10\rangle + \frac{\psi_{a11}}{c}|11\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

In welchem Zustand befindet sich das 2. und 3. QuBit, nachdem wir das erste gemessen haben?

Zu der Messung tragen folgende Zustände bei:

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|a00\rangle + \psi_{a01}|a01\rangle + \psi_{a10}|a10\rangle + \psi_{a11}|a11\rangle$$

Nach der Messung des 1. QuBits können wir dies auch weglassen

$$|\psi\rangle = \psi_{a00}|00\rangle + \psi_{a01}|01\rangle + \psi_{a10}|10\rangle + \psi_{a11}|11\rangle$$

Jetzt müssen wir noch sicherstellen, dass dieser Zustand auch normiert ist

$$|\psi\rangle = \frac{\psi_{a00}}{c}|00\rangle + \frac{\psi_{a01}}{c}|01\rangle + \frac{\psi_{a10}}{c}|10\rangle + \frac{\psi_{a11}}{c}|11\rangle$$

mit

$$c = \sqrt{\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2}$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Beispiel:

Messe 1. QuBit von $$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Beispiel:

Messe 1. QuBit von $$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

Finde 0

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Beispiel:

Messe 1. QuBit von $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$

Finde 0

dann ist die verbleibende unnormierte Wellenfunktion $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Beispiel:

Messe 1. QuBit von $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$

Finde 0

dann ist die verbleibende unnormierte Wellenfunktion $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$

und die normierte Wellenfunktion lautet dann $|00\rangle$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

Dies kann man sich vorstellen als

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

Dies kann man sich vorstellen als

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes \frac{\psi_{000}\,|00\rangle + \psi_{001}\,|01\rangle + \psi_{010}\,|10\rangle + \psi_{011}\,|11\rangle}{\sqrt{p_0}}$$
$$+ \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes \frac{\psi_{100}\,|00\rangle + \psi_{101}\,|01\rangle + \psi_{110}\,|10\rangle + \psi_{111}\,|11\rangle}{\sqrt{p_1}}.$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

Dies kann man sich vorstellen als

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes \frac{\psi_{000}\,|00\rangle + \psi_{001}\,|01\rangle + \psi_{010}\,|10\rangle + \psi_{011}\,|11\rangle}{\sqrt{p_0}}$$
$$+ \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes \frac{\psi_{100}\,|00\rangle + \psi_{101}\,|01\rangle + \psi_{110}\,|10\rangle + \psi_{111}\,|11\rangle}{\sqrt{p_1}}.$$

Oder (beachte: $p_0 + p_1 = 1$**!)**

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes |\psi_0\rangle + \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes |\psi_1\rangle\,,$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

Dies kann man sich vorstellen als

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes \frac{\psi_{000}\,|00\rangle + \psi_{001}\,|01\rangle + \psi_{010}\,|10\rangle + \psi_{011}\,|11\rangle}{\sqrt{p_0}}$$
$$+ \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes \frac{\psi_{100}\,|00\rangle + \psi_{101}\,|01\rangle + \psi_{110}\,|10\rangle + \psi_{111}\,|11\rangle}{\sqrt{p_1}}.$$

Oder (beachte: $p_0 + p_1 = 1$!)

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes |\psi_0\rangle + \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes |\psi_1\rangle\,,$$

Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|111\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle \otimes |11\rangle\,,$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Messe 1. QuBit von 3 QuBit Zustand

Dies kann man sich vorstellen als

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes \frac{\psi_{000}\,|00\rangle + \psi_{001}\,|01\rangle + \psi_{010}\,|10\rangle + \psi_{011}\,|11\rangle}{\sqrt{p_0}} + \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes \frac{\psi_{100}\,|00\rangle + \psi_{101}\,|01\rangle + \psi_{110}\,|10\rangle + \psi_{111}\,|11\rangle}{\sqrt{p_1}}.$$

Oder (beachte: $p_0 + p_1 = 1$!)

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0}\,|0\rangle \otimes |\psi_0\rangle + \sqrt{p_1}\,|1\rangle \otimes |\psi_1\rangle\,,$$

Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|111\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle \otimes |11\rangle\,,$$

Hieraus kann man sofort die Wahrscheinlichkeiten ablesen

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi^2_{ab0} + \psi^2_{ab1}$.

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2$.

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \dfrac{\psi_{ab0}|0\rangle + \psi_{ab1}|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2.$

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \frac{\psi_{ab0}|0\rangle + \psi_{ab1}|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

Übungsaufgabe 4.7: Zwei von Drei

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt das Messen der ersten beiden Qubits des Drei-Qubit-Zustands aus Gl. (4.7) welche Messergebnisse? Überprüfe dein Ergebnis mit QUIRKY.

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2$.

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \frac{\psi_{ab0}|0\rangle + \psi_{ab1}|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

Übungsaufgabe 4.7: Zwei von Drei

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt das Messen der ersten beiden Qubits des Drei-Qubit-Zustands aus Gl. (4.7) welche Messergebnisse? Überprüfe dein Ergebnis mit QUIRKY.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2.$

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \frac{\psi_{ab0}\,|0\rangle + \psi_{ab1}\,|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

Übungsaufgabe 4.7: Zwei von Drei

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt das Messen der ersten beiden Qubits des Drei-Qubit-Zustands aus Gl. (4.7) welche Messergebnisse? Überprüfe dein Ergebnis mit QUIRKY.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|111\rangle$$

$$\frac{1}{2} : |00\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2$.

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \dfrac{\psi_{ab0}\,|0\rangle + \psi_{ab1}\,|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

Übungsaufgabe 4.7: Zwei von Drei

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt das Messen der ersten beiden Qubits des Drei-Qubit-Zustands aus Gl. (4.7) welche Messergebnisse? Überprüfe dein Ergebnis mit QUIRKY.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|111\rangle$$

$$\frac{1}{2} : |00\rangle$$

$$\frac{1}{2} : |11\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können auch die ersten zwei QuBits eines allgemeinen Drei QuBit zustand messen.

Wir erhalten $|ab\rangle$ **mit der Wahrscheinlichkeit** $p_{a,b} = \psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2.$

Nach der Messung haben wir dann den Zustand: $|\psi_{a,b}\rangle = \dfrac{\psi_{ab0}\,|0\rangle + \psi_{ab1}\,|1\rangle}{\sqrt{\psi_{ab0}^2 + \psi_{ab1}^2}}$

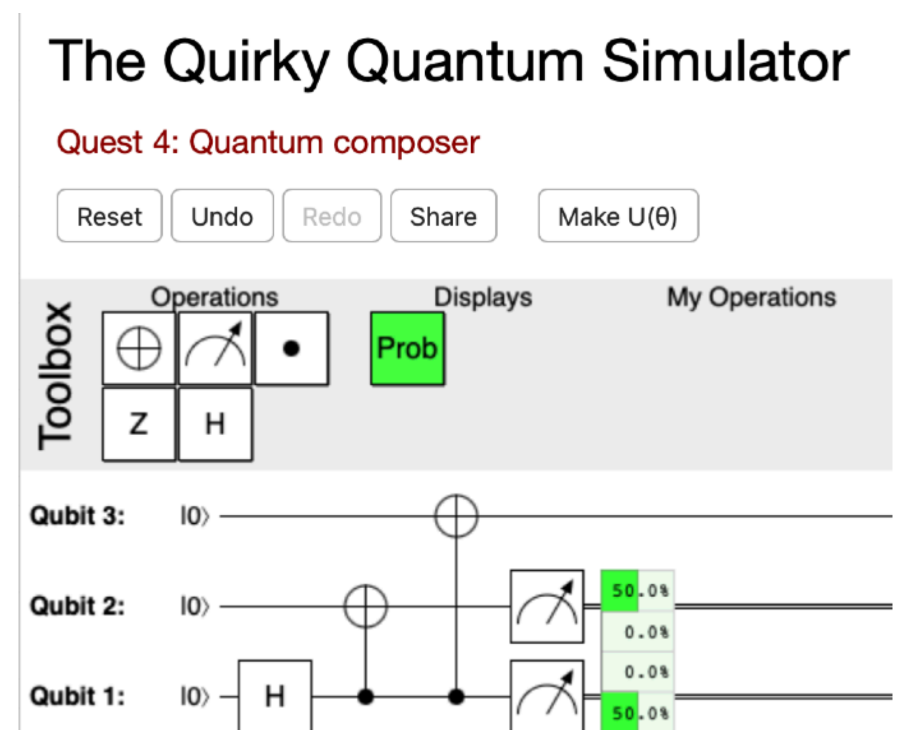
Übungsaufgabe 4.7: Zwei von Drei

Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt das Messen der ersten beiden Qubits des Drei-Qubit-Zustands aus Gl. (4.7) welche Messergebnisse? Überprüfe dein Ergebnis mit QUIRKY.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

$$\frac{1}{2} : |00\rangle$$

$$\frac{1}{2} : |11\rangle$$



4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

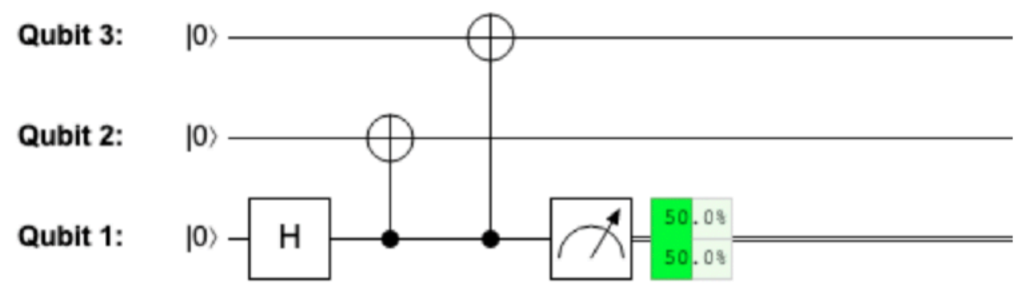
$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

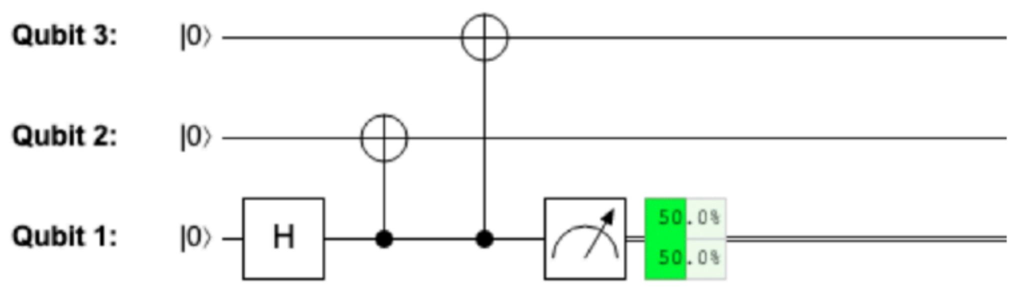


4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$



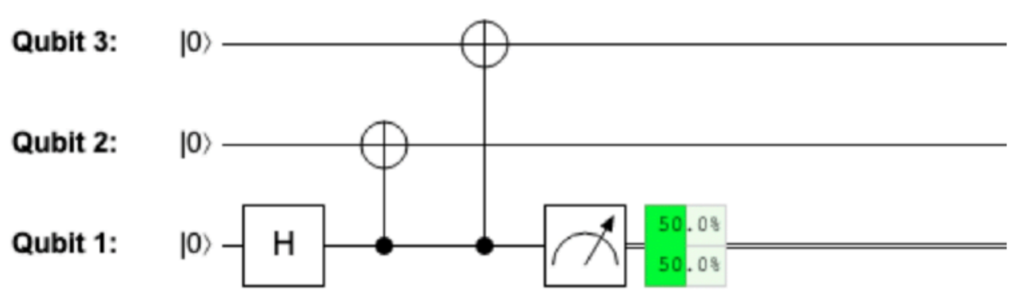
Messe 1. QuBit:

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$



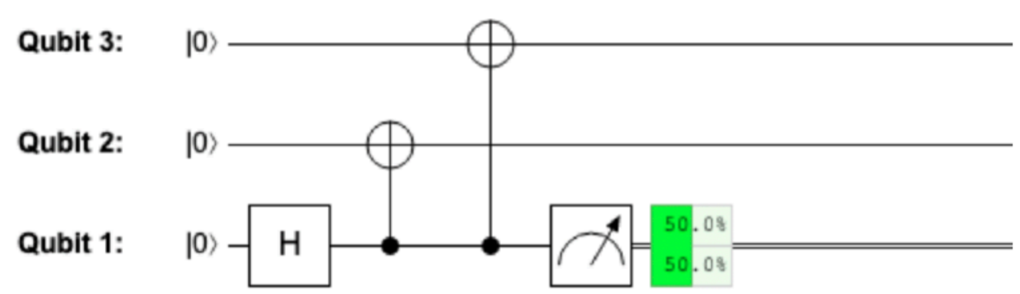
Messe 1. QuBit: beim Ergebnis $|1\rangle$ wollen wir die verbleibenden QuBits auf $|00\rangle$ zurücksetzen

4.1.6 Einzelne Qubits messen

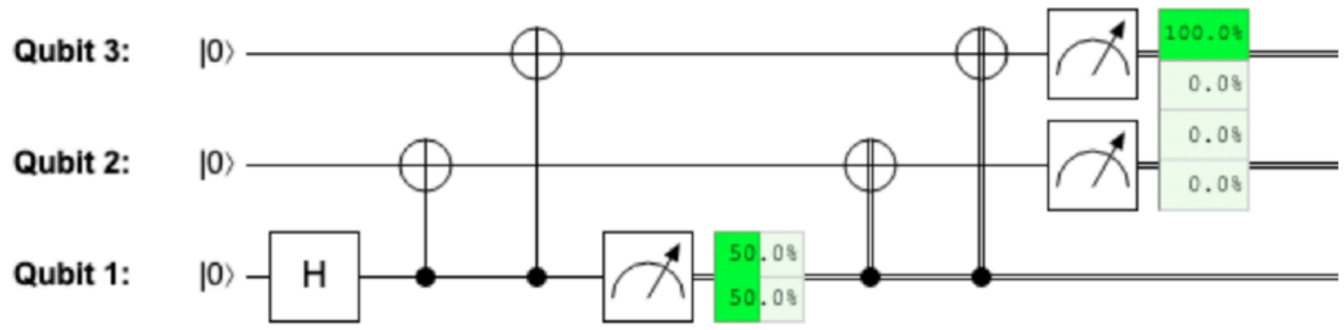
Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$



Messe 1. QuBit: beim Ergebnis $|1\rangle$ wollen wir die verbleibenden QuBits auf $|00\rangle$ zurücksetzen

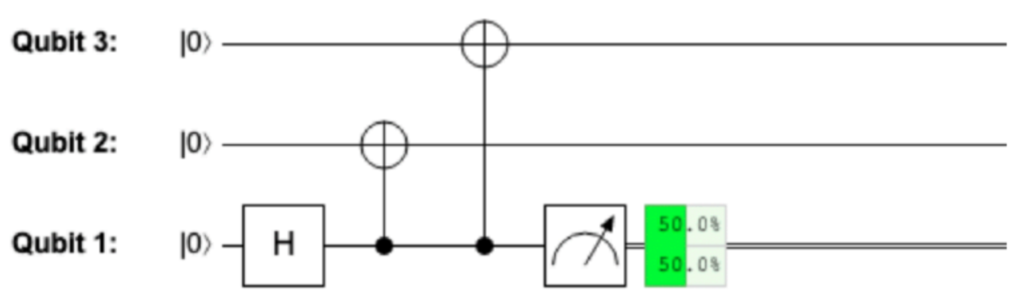


4.1.6 Einzelne Qubits messen

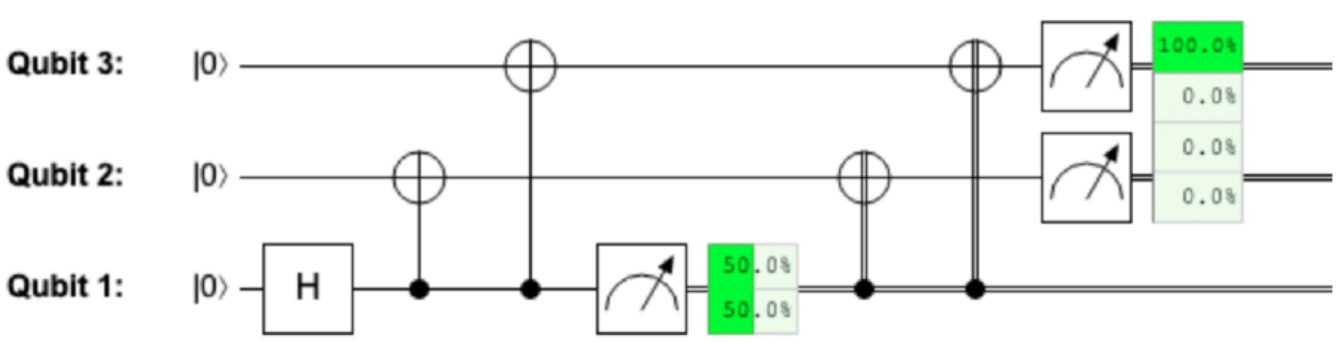
Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$



Messe 1. QuBit: beim Ergebnis $|1\rangle$ wollen wir die verbleibenden QuBits auf $|00\rangle$ zurücksetzen



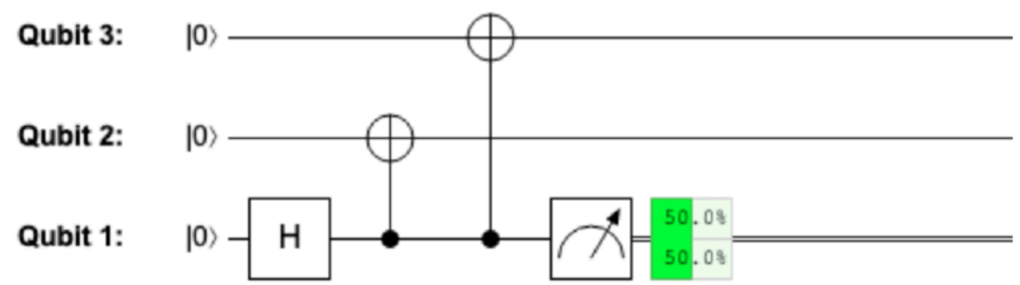
Kontroll-Bit ist hier ein klassisches Bit

4.1.6 Einzelne Qubits messen

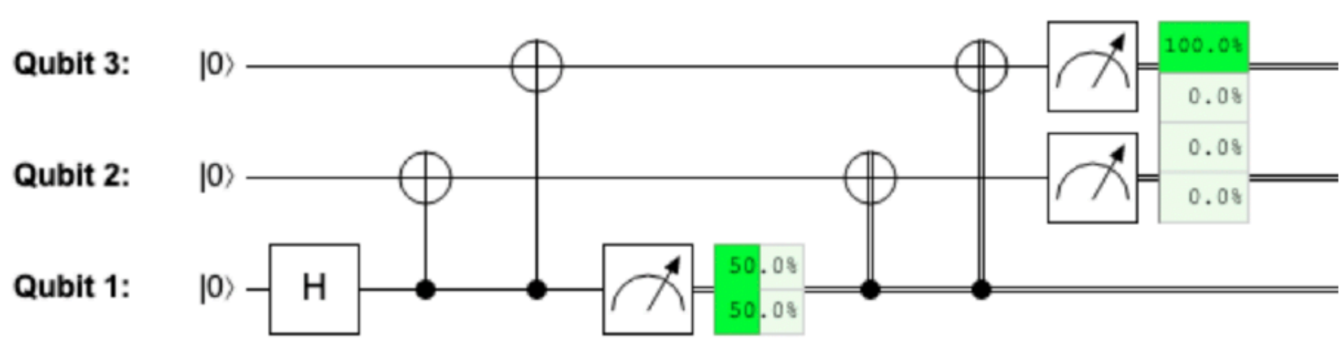
Wir können einige QuBits messen und abhängig vom Messergebnis die verbleibenden QuBits modifizieren

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$



Messe 1. QuBit: beim Ergebnis $|1\rangle$ wollen wir die verbleibenden QuBits auf $|00\rangle$ zurücksetzen



Kontroll-Bit ist hier ein klassisches Bit

Formal: $\text{CNOT}_{1\to 2}[a] \otimes |b, c\rangle = [a] \otimes |a \oplus b, c\rangle$

4.2 Quanten-Überraschungen

Verschiedene interessante Phänomene,
die beim Umgang mit QuBits auftreten

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C,
die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C, die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

$$C\left(|\psi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C, die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

$$C\left(|\psi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Diese Operation macht dann folgendes aus den Basis Operatoren

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C,
die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

$$C\left(|\psi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Diese Operation macht dann folgendes aus den Basis Operatoren

$$C\left(|0\rangle \otimes |0\rangle\right) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C, die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

$$C\left(|\psi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Diese Operation macht dann folgendes aus den Basis Operatoren

$$C\left(|0\rangle \otimes |0\rangle\right) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$
$$C\left(|1\rangle \otimes |0\rangle\right) = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Klassische Bits können einfach geklont werden:
wir schauen es an und das was wir sehen, das kopieren wir

$$[0] \mapsto [00],$$
$$[1] \mapsto [11].$$

Kann man Qu-Bits auch klonen?

Annahme: Klonen geht, d.h. bei gegeben Zustand $|\psi\rangle$ gibt es die Operation C, die z.B. aus dem Zustand $|0\rangle$ den Zustand $|\psi\rangle$ macht .

$$C\left(|\psi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Diese Operation macht dann folgendes aus den Basis Operatoren

$$C\left(|0\rangle \otimes |0\rangle\right) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$
$$C\left(|1\rangle \otimes |0\rangle\right) = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Dies ist möglich und wäre z.B. die $\widehat{\text{CNOT}}_{1\to 2}$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. "$0 = 1$"). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).

2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right)$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. “$0 = 1$”). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).
2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle}$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. "$0 = 1$"). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).

2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. "$0 = 1$"). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).
2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. "$0 = 1$"). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).
2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\big(|+\rangle \otimes |0\rangle\big) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

$$\hat{C}\big(|+\rangle \otimes |0\rangle\big) \longrightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{C}\big(|00\rangle + |10\rangle\big)$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. "$0 = 1$"). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).
2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

$$\hat{C}\left(|+\rangle \otimes |0\rangle\right) \longrightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{C}\left(|00\rangle + |10\rangle\right)$$

$$C\left(|0\rangle \otimes |0\rangle\right) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$
$$C\left(|1\rangle \otimes |0\rangle\right) = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

Hausaufgabe 4.1: Unklonbarkeit

In dieser Hausaufgabe wollen wir beweisen, dass es keine Quantenoperation C geben kann, die Gl. (4.16) erfüllt. Wir nutzen dafür einen Trick, der sich Widerspruchsbeweis nennt. Das bedeutet, wir werden zeigen, dass die Existenz einer Klon-Operation C etwas impliziert, von dem wir wissen, dass es nicht stimmt (z.B. “$0 = 1$”). Daraus können wir dann schließen, dass kein solches C existieren kann.

Lass uns also zu Beginn annehmen, dass es eine Quantenoperation C gibt, die Gl. (4.16) erfüllt. Nun kannst du $C(|+\rangle \otimes |0\rangle)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen:

1. Nutze zuerst Gl. (4.16) und schreibe das Ergebnis dann in der Form von Gl. (3.30).

2. Schreibe erst $|+\rangle \otimes |0\rangle$ in der Form von Gl. (3.30), nutze dann die Linearität von C und wende abschließend Gl. (4.16) an.

Erhältst du in beiden Fällen das gleiche Ergebnis? Wenn nicht, was kannst du daraus schließen?

$$\hat{C}\big(|+\rangle \otimes |0\rangle\big) \xrightarrow{C(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

$$\hat{C}\big(|+\rangle \otimes |0\rangle\big) \longrightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{C}\big(|00\rangle + |10\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

$$C\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$C\big(|1\rangle \otimes |0\rangle\big) = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

4.2.1 Unklonbarkeit

No-Cloning Theorem

Ein unbekannter Quantenzustand kann nicht kopiert werden.
Dieser beinhaltet im Allgemeinen unendlich viel Information!

Received 15 June; accepted 1 September 1982.

1. Kagi, J. H. R. & Nordberg, M. (eds) *Metallothionein* (Birkhauser, Basle, 1979).
2. Karin, M. & Herschman, H. R. *Science* **204**, 176–177 (1979).
3. Pulido, P., Kagi, J. H. R. & Vallee, B. L. *Biochemistry* **5**, 1768–1777 (1966).
4. Rudd, C. J. & Herschmann, H. R. *Tox. appl. Pharmac.* **47**, 273–278 (1979).
5. Karin, M. & Herschman, H. R. *Eur. J. Biochem.* **107**, 395–401 (1980).
6. Kissling, M. M. and Kagi, J. H. R. *FEBS Lett.* **82**, 247–250 (1977).
7. Karin, M. *et al. Nature* **286**, 295–297 (1980).
8. Karin, M., Slater, E. P. & Herschman, H. R. *J. cell. Physiol.* **106**, 63–74 (1981).
9. Durnam, D. M. & Palmiter, R. D. *J. biol. Chem.* **256**, 5712–2716 (1981).
10. Hager, L. J. & Palmiter, R. D. *Nature* **291**, 340–342 (1981).
11. Karin, M. & Richards, R. *Nucleic Acids Res.* **10**, 3165–3173 (1982).
12. Lawn, R. M. *et al. Cell* **15**, 1157–1174 (1978).
13. Southern, E. M. *J. molec. Biol.* **98**, 503–517 (1975).
14. Benton, W. D. & Davis, R. W. *Science* **196**, 180–182 (1977).
15. Glanville, N., Durnam, D. M. & Palmiter, R. D. *Nature* **292**, 267–269 (1981).
16. Breathnach, R. *et al. Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **75**, 4853–4857 (1978).
17. Weaver, R. F. & Weissman, C. *Nucleic Acids Res.* **5**, 1175–1193 (1979).
18. Kayb, K. E., Warren, R. & Palmiter, R. D. *Cell* **29**, 99–108 (1982).
19. Brinster, R. L. *et al. Nature* **296**, 39–42 (1982).
20. Kingsbury, R. & McKnight, S. L. *Science* **217**, 316–324 (1982).
21. Larsen, A. & Weintraub, H. *Cell* **29**, 609–672 (1982).
22. Proudfoot, N. J. & Brownlee, G. G. *Nature* **263**, 211–214 (1976).
23. Calos, M. P. & Miller, J. H. *Cell* **20**, 579–595 (1980).
24. Hollis, F. G. *et al. Nature* **296**, 321–325 (1982).
25. Leuders, K., Leder, A., Leder, P. & Kuff, E. *Nature* **295**, 426–428 (1982).
26. Van Arsdell, S. W. *et al. Cell* **26**, 11–17 (1981).
27. Jagadeeswaran, P., Forget, B. G. & Weissman, S. M. *Cell* **26**, 141–142 (1982).
28. Nishioka, Y., Leder, A. & Leder, P. *Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **77**, 2806–2809 (1980).
29. Wilde, C. D. *et al. Nature* **297**, 83–84 (1982).
30. Shaul, Y., Kaminichik, J. & Aviv, H. *Eur. J. Biochem.* **116**, 461–466 (1981).
31. Perry, R. P. *et al. Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **77**, 1937–1941 (1980).
32. Hofer, E. & Darnel, J. E. *Cell* **23**, 585–593 (1981).
33. Bell, G., Karam, J. H. & Rutter, W. J. *Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **78**, 5759–5763 (1981).
34. Rigby, P. W. J. *et al. J. molec. Biol.* **113**, 237–251 (1977).
35. Wahl, G. M., Stern, M. & Stark, G. R. *Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **76**, 3683–3687 (1979).
36. Maxam, A. & Gilbert, W. *Meth. Enzym.* **65**, 499–559 (1980).
37. Sanger, F., Nicklen, S. & Coulson, A. R. *Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A.* **74**, 5463–5468 (1979).
38. Goodman, H. M. *Meth. Enzym.* **65**, 63–64 (1980).
39. Heidecker, G., Messing, J. & Gronenborn, B. *Gene* **10**, 69–73 (1980).
40. O'Farrel, P. *Focus* **3**, 1–3 (1981).

LETTERS TO NATURE

A single quantum cannot be cloned

W. K. Wootters*

Center for Theoretical Physics, The University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712, USA

W. H. Zurek

Theoretical Astrophysics 130-33, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA

on an incoming photon with polarization state $|s\rangle$:

$$|A_0\rangle|s\rangle \rightarrow |A_s\rangle|ss\rangle \qquad (1)$$

Here $|A_0\rangle$ is the 'ready' state of the apparatus, and $|A_s\rangle$ is its final state, which may or may not depend on the polarization of the original photon. The symbol $|ss\rangle$ refers to the state of the radiation field in which there are two photons each having the polarization $|s\rangle$. Let us suppose that such an amplification can in fact be accomplished for the vertical polarization $|\updownarrow\rangle$ and for the horizontal polarization $|\leftrightarrow\rangle$. That is,

$$|A_0\rangle|\updownarrow\rangle \rightarrow |A_{\text{vert}}\rangle|\updownarrow\updownarrow\rangle \qquad (2)$$

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

2 Münzen im Zustand $r = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

2 Münzen im Zustand $r = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **- jeder nimmt eine Münze mit, die nun entweder Kopf oder Zahl zeigt und dies nicht mehr verändert.**

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

2 Münzen im Zustand $r = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **- jeder nimmt eine Münze mit, die nun entweder Kopf oder Zahl zeigt und dies nicht mehr verändert.**

Alice will nun die Nachricht $m \in \{0,1\}$ **an Bob schicken**

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

2 Münzen im Zustand $r = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **- jeder nimmt eine Münze mit, die nun entweder Kopf oder Zahl zeigt und dies nicht mehr verändert.**

Alice will nun die Nachricht $m \in \{0,1\}$ **an Bob schicken**

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r$

4.2.2 One-Time-Pad

One-Time-Pad: Teleportation von probabilistischen Zuständen

Problem:
Alice möchte eine Nachricht an Bob verschicken.
Die Nachricht soll so verschlüsselt sein, dass nur Bob sie verstehen kann, insbesondere nicht Eve, auch wenn sie die Nachricht liest .

Wie kann so was gehen?

Trick: Alice und Bob treffen sich davor in einem Cafe

2 Münzen im Zustand $r = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **- jeder nimmt eine Münze mit, die nun entweder Kopf oder Zahl zeigt und dies nicht mehr verändert.**

Alice will nun die Nachricht $m \in \{0,1\}$ **an Bob schicken**

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) **Alice schaut sich ihr Bit von** r **an**

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt** $\hat{\text{NOT}}(m)$ **an Bob**

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt N**$\hat{\text{O}}$**T**(m) **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt** $\hat{\text{NOT}}(m)$ **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4) Bob schaut sich sein Bit von r **an, wenn er** m **empfängt**

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt** $\hat{\text{NOT}}(m)$ **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4) Bob schaut sich sein Bit von r **an, wenn er** m **empfängt**

5a) $r = 0 \Rightarrow$ **Bob nimmt** m

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt NÔT**(m) **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4) Bob schaut sich sein Bit von r **an, wenn er** m **empfängt**

5a) $r = 0 \Rightarrow$ **Bob nimmt** m

5b) $r = 1 \Rightarrow$ **Bob nimmt NÔT**(m)

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt** $\hat{\text{NOT}}(m)$ **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4) Bob schaut sich sein Bit von r **an, wenn er** m **empfängt**

5a) $r = 0 \Rightarrow$ **Bob nimmt** m

5b) $r = 1 \Rightarrow$ **Bob nimmt** $\hat{\text{NOT}}(m)$

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

4.2.2 One-Time-Pad

Der Gesamt-zustand aller Bits lautet dann $[m] \otimes r = \frac{1}{2}[m00] + \frac{1}{2}[m11]$

Alice besitzt die ersten beiden Bits von diesem Zustand, Bob das dritte.

Protokoll:

1) Alice schaut sich ihr Bit von r **an**

2a) $r = 0 \Rightarrow$ **sie schickt** m **an Bob**

2b) $r = 1 \Rightarrow$ **sie schickt** $\hat{\text{NOT}}(m)$ **an Bob**

3) Wenn Eve diese Nachricht abfängt, dann erhält sie immer mit 50% 0 oder 1

4) Bob schaut sich sein Bit von r **an, wenn er** m **empfängt**

5a) $r = 0 \Rightarrow$ **Bob nimmt** m

5b) $r = 1 \Rightarrow$ **Bob nimmt** $\hat{\text{NOT}}(m)$

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\text{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}} \; \underbrace{\text{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m] \otimes r).$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underset{\textbf{Bob}}{\mathrm{CNOT}_{3\to1}}\ \underset{\textbf{Alice}}{\mathrm{CNOT}_{2\to1}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1])$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}([m]\otimes r).$$

Bob **Alice**

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$

$$= \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(\mathrm{NOT}(m)),1,1])$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$
$$= \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(\mathrm{NOT}(m)),1,1]) = \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1])$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$
$$= \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(\mathrm{NOT}(m)),1,1]) = \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = [m]\otimes r.$$

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$
$$= \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(\mathrm{NOT}(m)),1,1]) = \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = [m]\otimes r.$$

Am Ende hat Bob das Bit m

4.2.2 One-Time-Pad

Formal werden folgende Operationen durchgeführt:

$$\underbrace{\mathrm{CNOT}_{3\to 1}}_{\textbf{Bob}}\ \underbrace{\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}_{\textbf{Alice}}([m]\otimes r).$$

$$\mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = \mathrm{CNOT}_{3\to 1}\ \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(m),1,1])$$
$$= \frac{1}{2}([m,0,0]+[\mathrm{NOT}(\mathrm{NOT}(m)),1,1]) = \frac{1}{2}([m,0,0]+[m,1,1]) = [m]\otimes r.$$

Am Ende hat Bob das Bit m

Man kann nicht nur ein Basis-Bit 0 oder 1 verschicken, wegen Linearität kann man auch ein ganzes probabilistisches Bit p verschicken

Das gesamte Bit ist dann $p \otimes r$

4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:

Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.

4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:

Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^{+}\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.

Alice hat zusätzlich noch das Nachrichten-QuBit $|\psi\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:

Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.

Alice hat zusätzlich noch das Nachrichten-QuBit $|\psi\rangle$

Insgesamt beschreibt dies den 3 QuBit Zustand $|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:
Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.
Alice hat zusätzlich noch das Nachrichten-QuBit $|\psi\rangle$

Insgesamt beschreibt dies den 3 QuBit Zustand $|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle$

Falls Alice den Zustand $|\psi\rangle = |1\rangle$ senden will, sieht das so aus

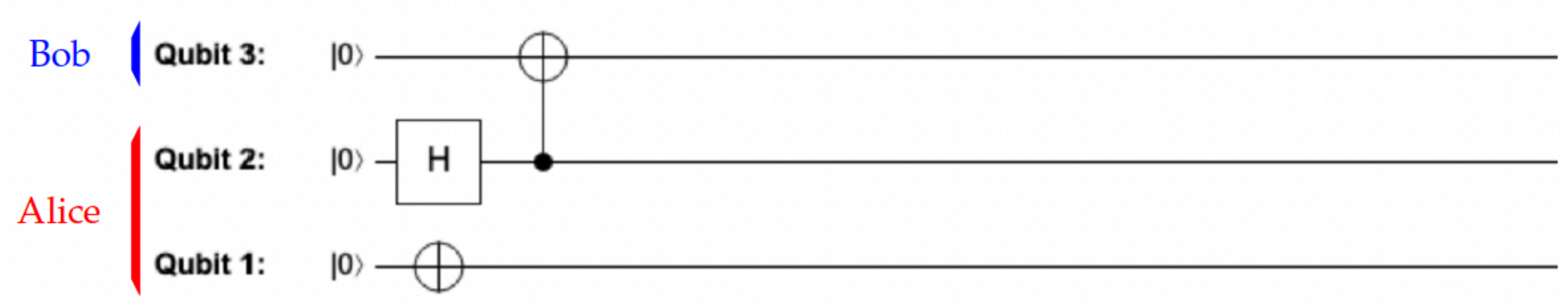
4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:
Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.
Alice hat zusätzlich noch das Nachrichten-QuBit $|\psi\rangle$

Insgesamt beschreibt dies den 3 QuBit Zustand $|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle$

Falls Alice den Zustand $|\psi\rangle = |1\rangle$ senden will, sieht das so aus



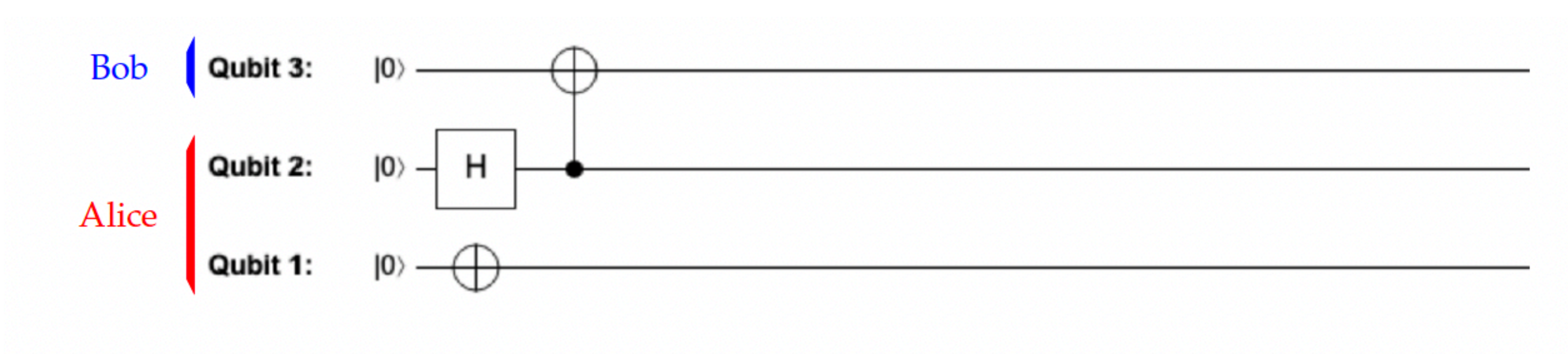
4.2.3 Quanten-Teleportation

QuBits können nicht geklont werden, aber sie können von einem Ort zu einem anderen gebracht werden!

Ausgangszustand:
Alice und Bob teilen sich den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$, Alice hat das erste QuBit davon und Bob das zweite.
Alice hat zusätzlich noch das Nachrichten-QuBit $|\psi\rangle$

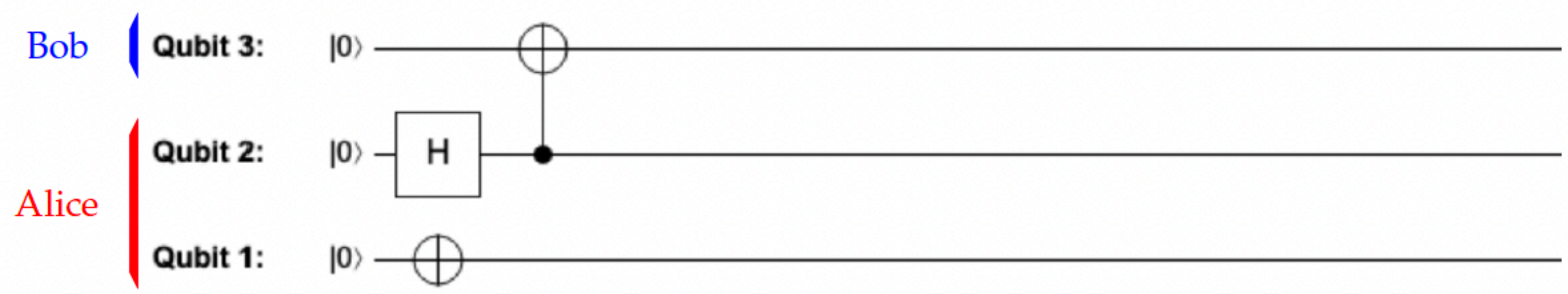
Insgesamt beschreibt dies den 3 QuBit Zustand $|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle$

Falls Alice den Zustand $|\psi\rangle = |1\rangle$ senden will, sieht das so aus

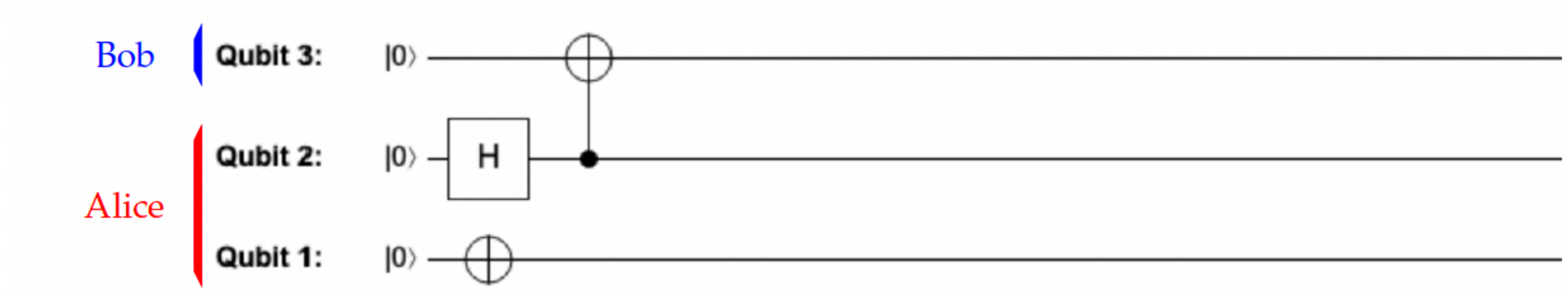


Wie machen wir weiter?

4.2.3 Quanten-Teleportation

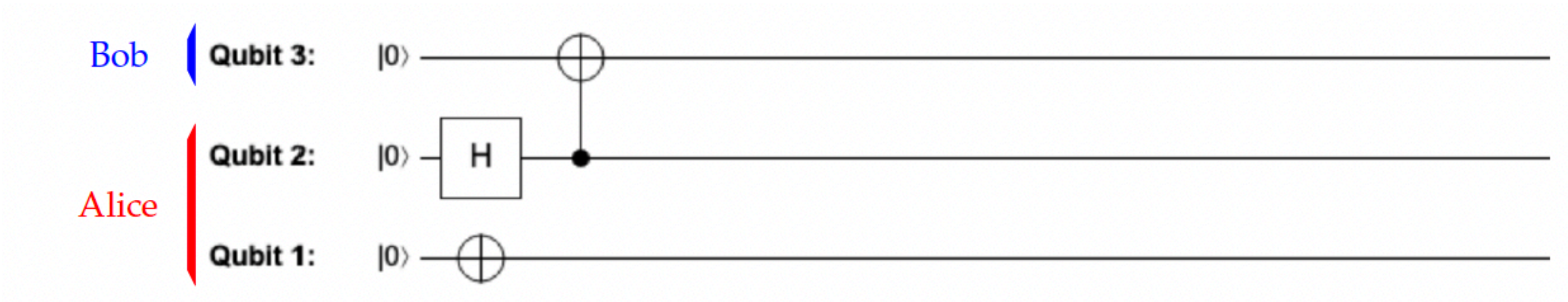


4.2.3 Quanten-Teleportation



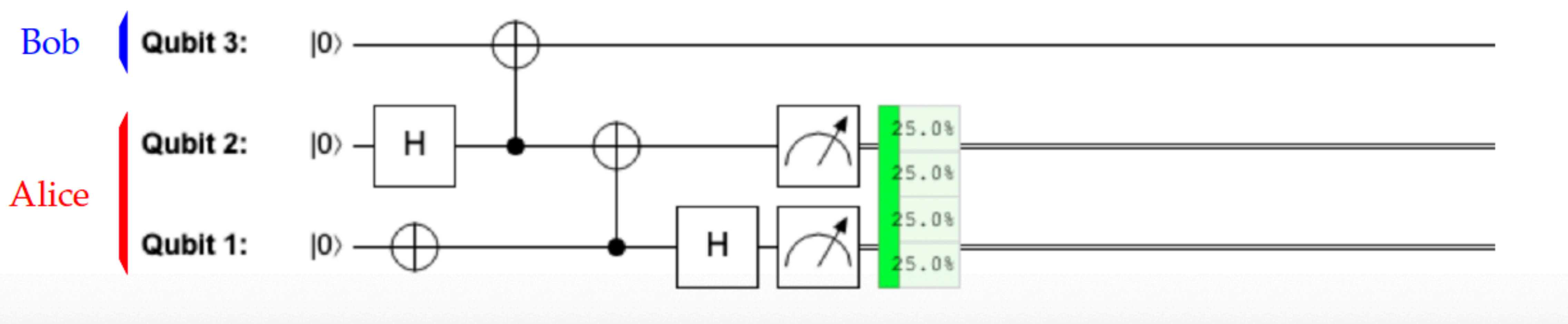
Wie machen wir weiter? Wir können $|\psi\rangle$ nicht klonen, vielleicht muss Alice's Zustand durch eine Messung zerstört werden? Einfache Messung reicht nicht, da $|\psi\rangle$ nicht aus einer einzigen Messung extrahiert werden kann.

4.2.3 Quanten-Teleportation

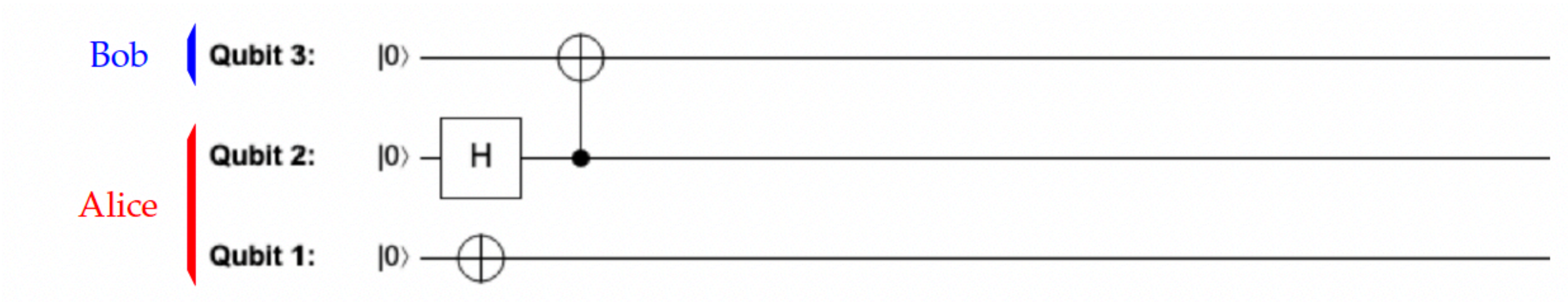


Wie machen wir weiter? Wir können $|\psi\rangle$ nicht klonen, vielleicht muss Alice's Zustand durch eine Messung zerstört werden? Einfache Messung reicht nicht, da $|\psi\rangle$ nicht aus einer einzigen Messung extrahiert werden kann.

Man wird finden: (Operation zur Unterscheidung der 4 Bell-zustände)

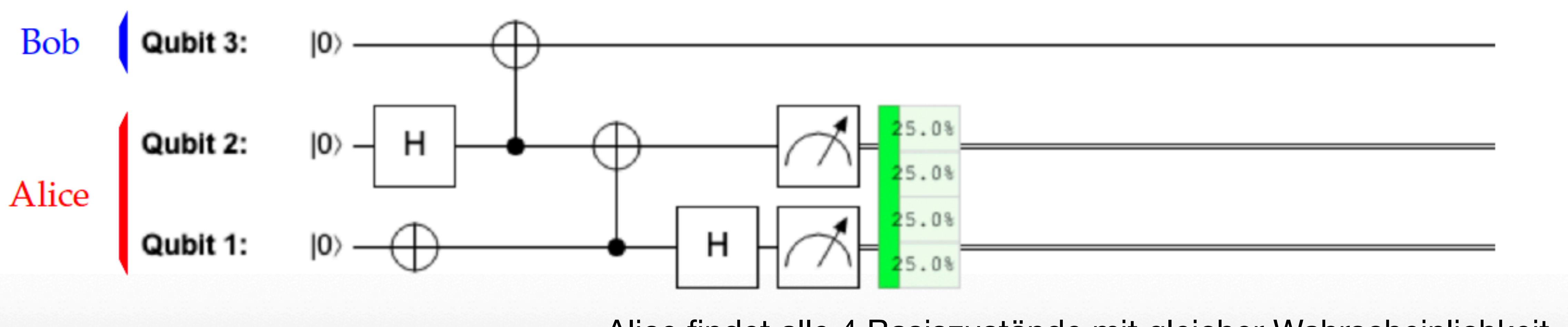


4.2.3 Quanten-Teleportation



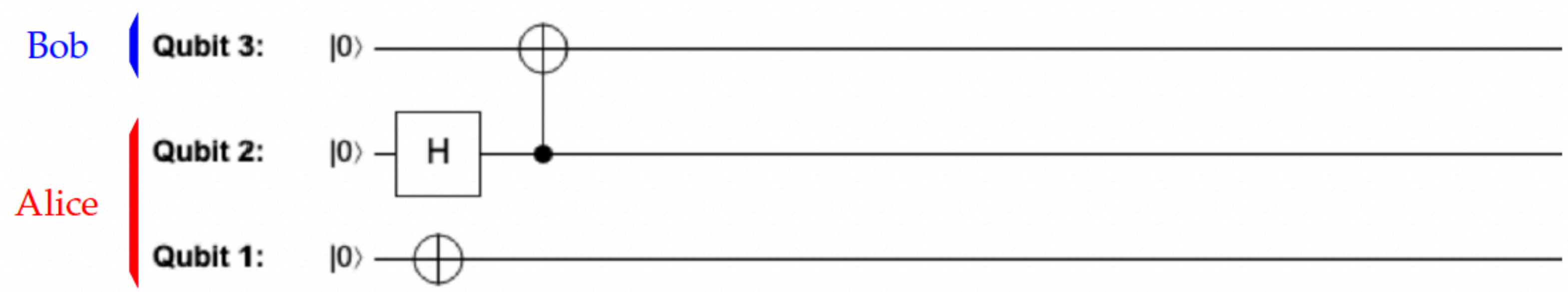
Wie machen wir weiter? Wir können $|\psi\rangle$ nicht klonen, vielleicht muss Alice's Zustand durch eine Messung zerstört werden? Einfache Messung reicht nicht, da $|\psi\rangle$ nicht aus einer einzigen Messung extrahiert werden kann.

Man wird finden: (Operation zur Unterscheidung der 4 Bell-zustände)



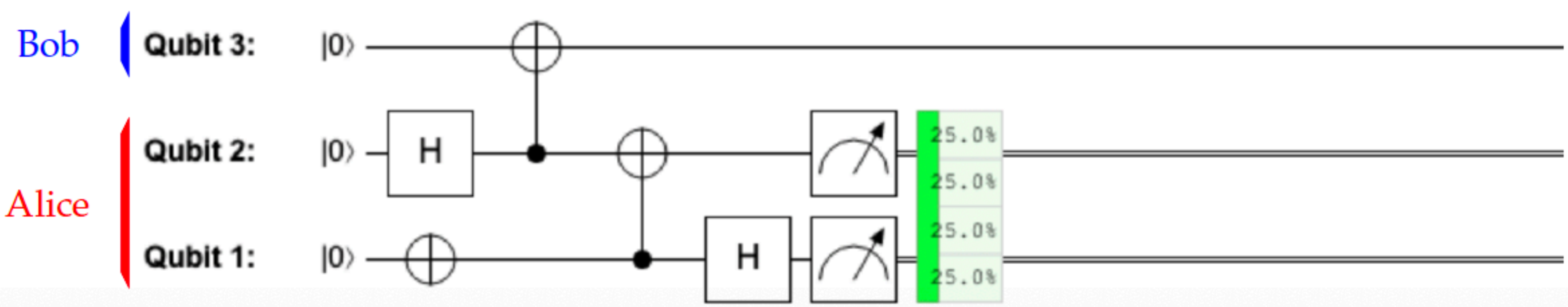
Alice findet alle 4 Basiszustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit

4.2.3 Quanten-Teleportation



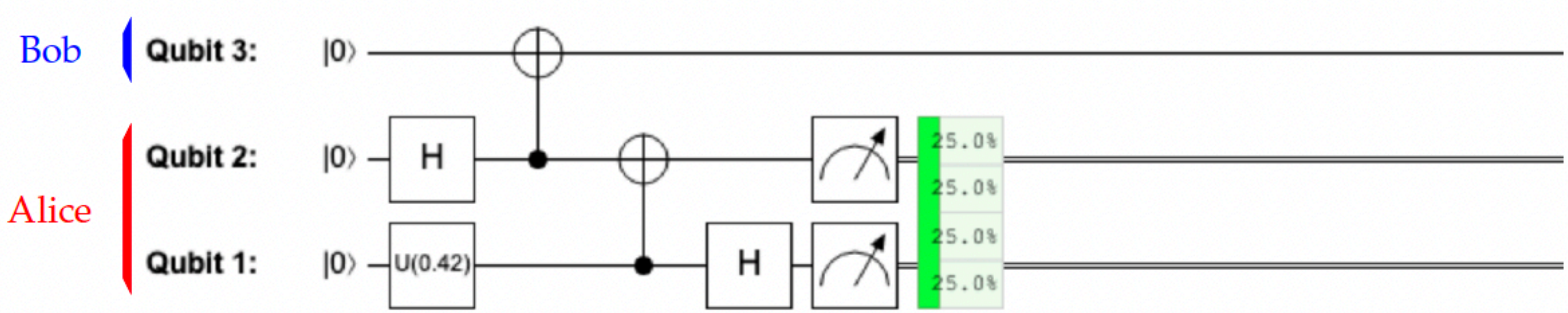
Wie machen wir weiter? Wir können $|\psi\rangle$ nicht klonen, vielleicht muss Alice's Zustand durch eine Messung zerstört werden? Einfache Messung reicht nicht, da $|\psi\rangle$ nicht aus einer einzigen Messung extrahiert werden kann.

Man wird finden: (Operation zur Unterscheidung der 4 Bell-zustände)

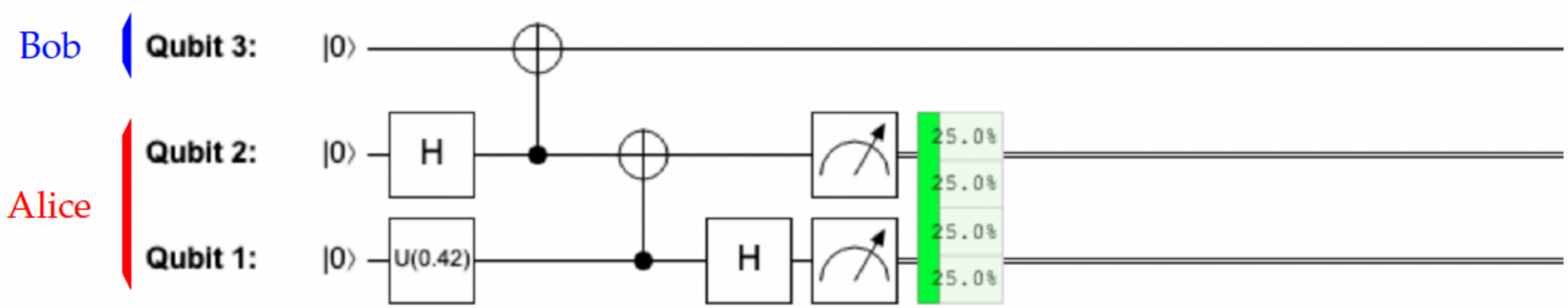


Alice findet alle 4 Basiszustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit

Will Alice einen anderen Zustand schicken, dann findet man dasselbe Messergebnis



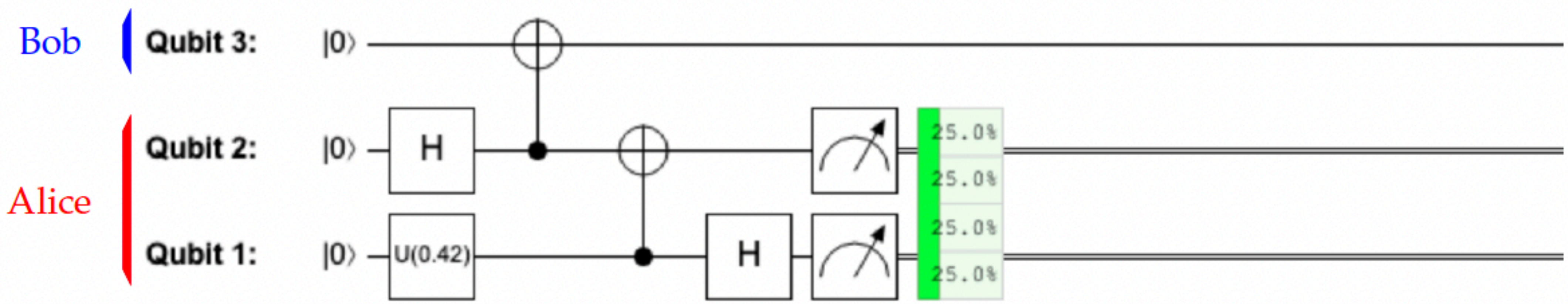
4.2.3 Quanten-Teleportation



Der allgemeine Zustand vor Messung lautet $(\hat{H} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1})(\mathrm{CN\hat{O}T}_{1_2} \otimes \hat{1})\big(\,|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big)$

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes \left|\Phi^+\right\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle)
\end{aligned}
$$

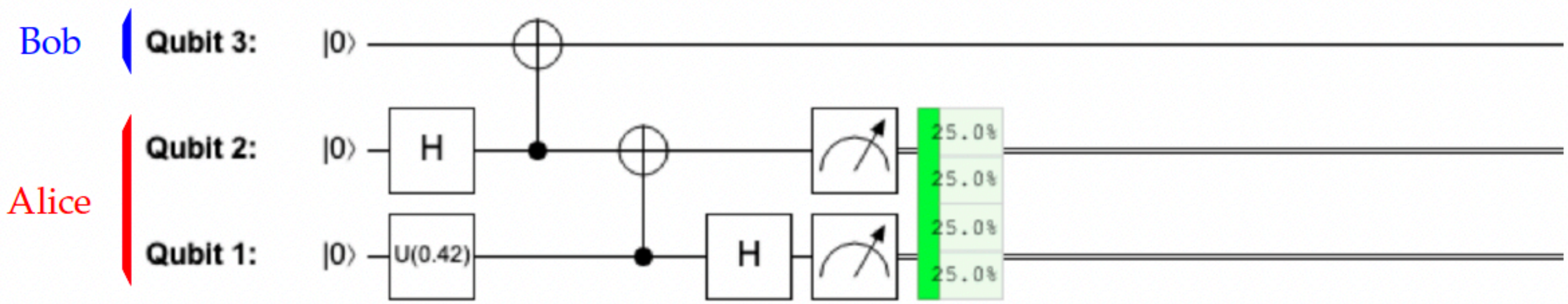
4.2.3 Quanten-Teleportation



Der allgemeine Zustand vor Messung lautet $(\hat{H} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1})(\widehat{\text{CNOT}}_{1_2} \otimes \hat{1})\big(\,|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big)$

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(|\psi\rangle \otimes \left|\Phi^+\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle\right)
\end{aligned}
$$

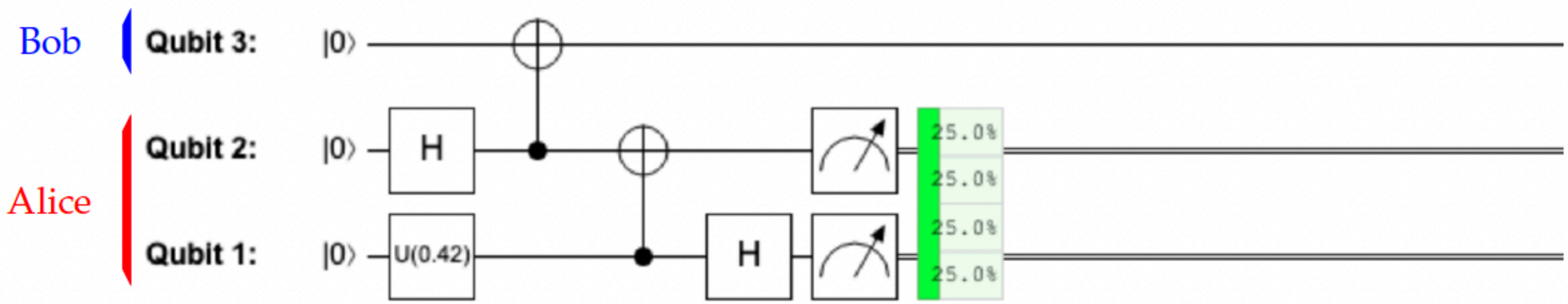
4.2.3 Quanten-Teleportation



Der allgemeine Zustand vor Messung lautet $(\hat{H} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1})(\mathrm{CN\hat{O}T}_{1_2} \otimes \hat{1})\big(\,|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big)$

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle\right)
\end{aligned}
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation



Der allgemeine Zustand vor Messung lautet $(\hat{H} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1})(\hat{\text{CNOT}}_{1_2} \otimes \hat{1})\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big)$

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(|\psi\rangle \otimes \left|\Phi^+\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I\right)\left(\psi_0|000\rangle + \psi_0|011\rangle + \psi_1|100\rangle + \psi_1|111\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\left(\psi_0|000\rangle + \psi_0|011\rangle + \psi_1|110\rangle + \psi_1|101\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\psi_0|000\rangle + \psi_0|100\rangle + \psi_0|011\rangle + \psi_0|111\rangle + \psi_1|010\rangle - \psi_1|110\rangle + \psi_1|001\rangle - \psi_1|101\rangle\right) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0|0\rangle - \psi_1|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

4.2.3 Quanten-Teleportation

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

$$
p_{00} = \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{\psi_0^2 + \psi_1^2}{4} = \frac{1}{4},
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{\psi_0^2 + \psi_1^2}{4} = \frac{1}{4}, \\
p_{01} &= \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{\psi_0^2 + \psi_1^2}{4} = \frac{1}{4}, \\
p_{01} &= \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
p_{10} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{\psi_0^2 + \psi_1^2}{4} = \frac{1}{4}, \\
p_{01} &= \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
p_{10} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
p_{11} &= \left(\frac{-\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

4.2.3 Quanten-Teleportation

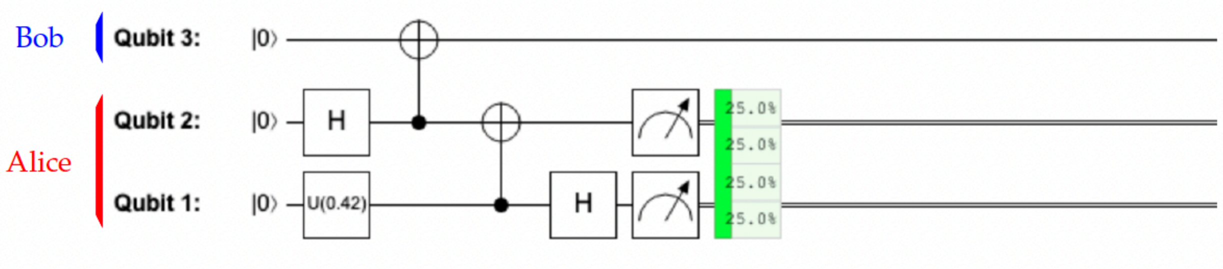
$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_{ab}, das Ergebnis $|ab\rangle$ für die ersten beiden QuBits zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{\psi_0^2 + \psi_1^2}{4} = \frac{1}{4}, \\
p_{01} &= \left(\frac{\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
p_{10} &= \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\psi_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
p_{11} &= \left(\frac{-\psi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Wie von Quirky behauptet, tritt jedes Ergebnis mit $\frac{1}{4}$ auf

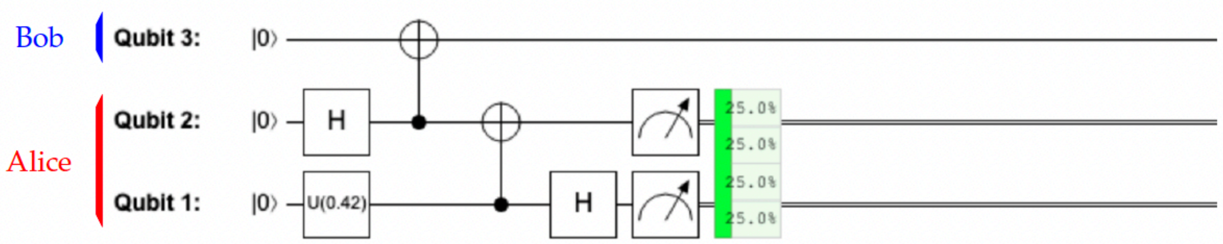
4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,\big(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

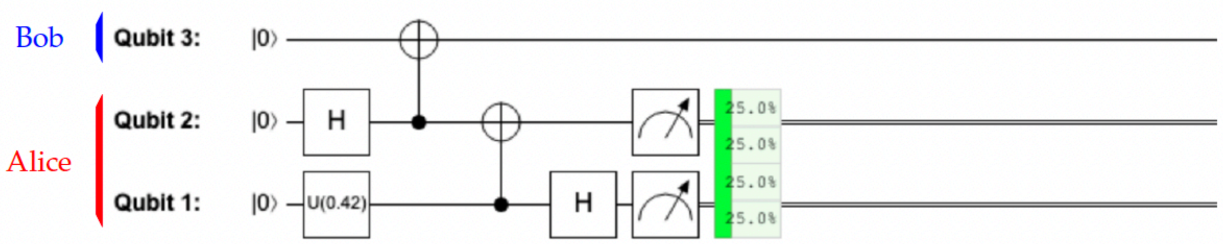
4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob's Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:
Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



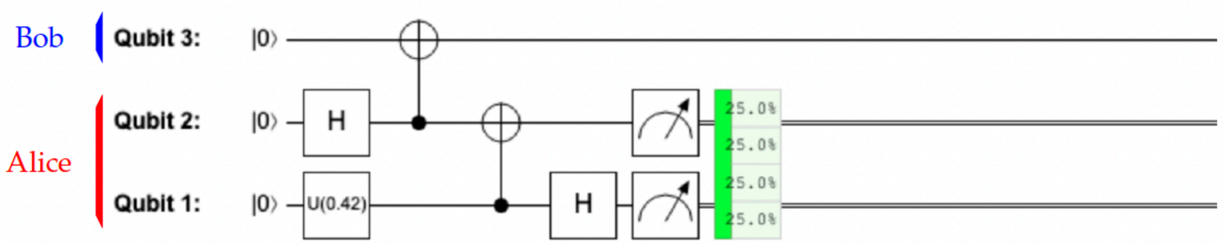
$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle)\\
&= \frac{1}{2}\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle)\\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}\\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

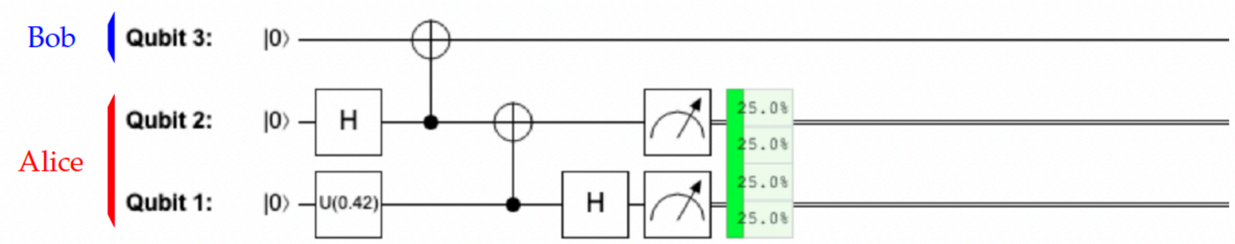
Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

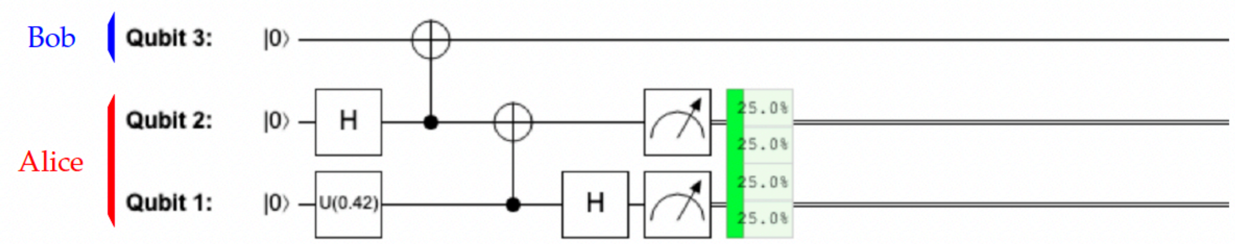
Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0|0\rangle - \psi_1|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

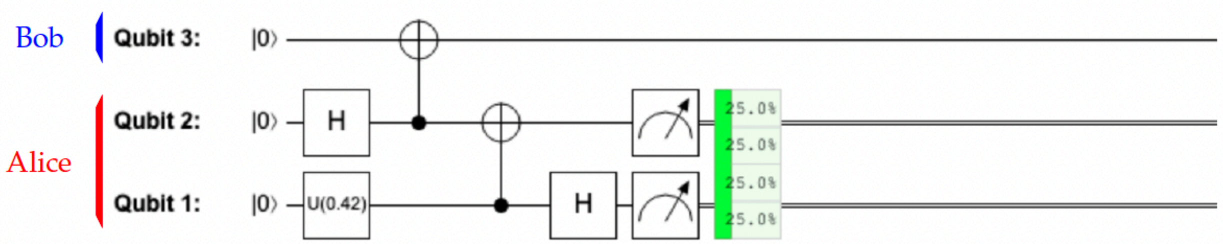
Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0|0\rangle - \psi_1|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

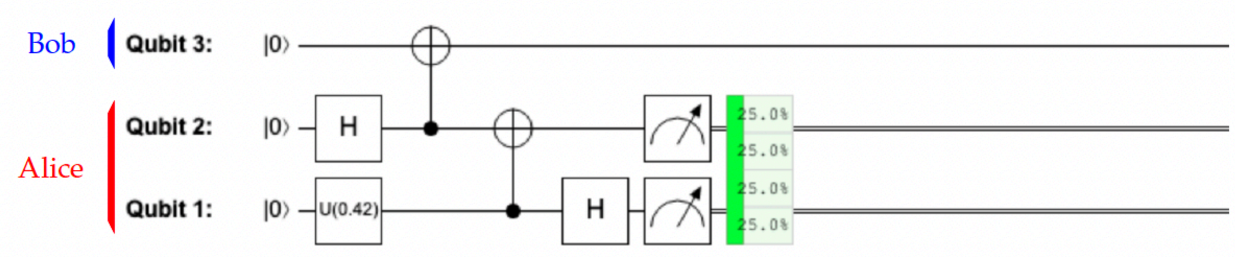
Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 ⇒ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle$

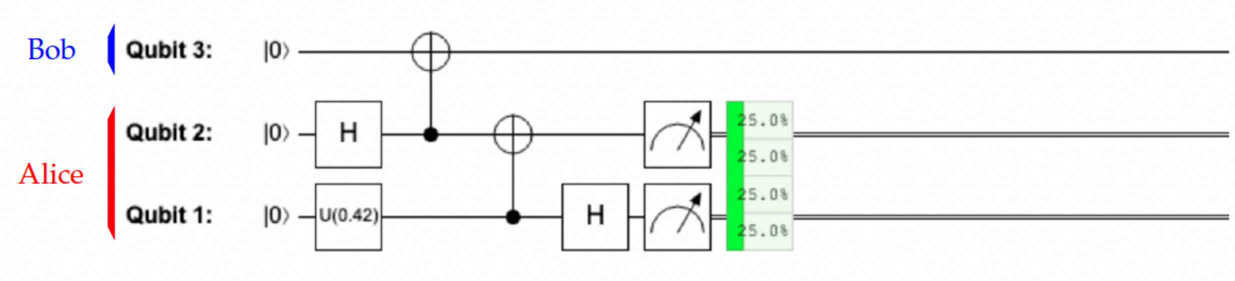
Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 ⇒ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: NÔT $|\psi'_{01}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0|0\rangle - \psi_1|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1|0\rangle + \psi_0|1\rangle$

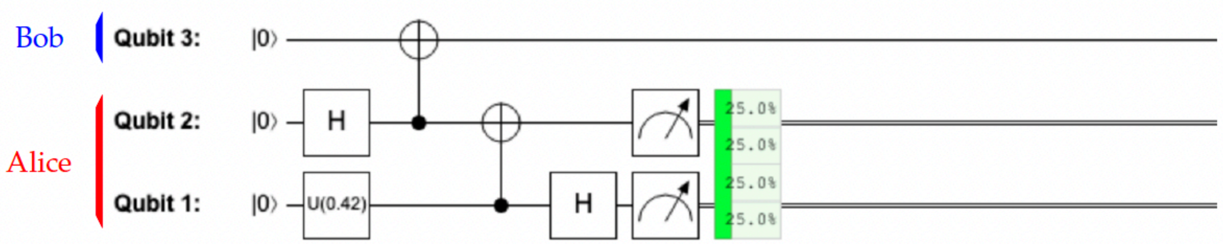
Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 ⇒ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: NÔT $|\psi'_{01}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $\hat{Z}|\psi'_{10}\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation



$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|100\rangle + \psi_1\,|111\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I \otimes I)\,(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\psi_0\,|000\rangle + \psi_0\,|100\rangle + \psi_0\,|011\rangle + \psi_0\,|111\rangle + \psi_1\,|010\rangle - \psi_1\,|110\rangle + \psi_1\,|001\rangle - \psi_1\,|101\rangle) \\
&= |00\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle}{2} + |01\rangle \otimes \frac{\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2} \\
&+ |10\rangle \otimes \frac{\psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle}{2} + |11\rangle \otimes \frac{-\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

Bob’s Zustand hängt nun vom Ergebnis der Messung von Alice ab:

Alice: 00 ⇒ Bob: $|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $|\psi'_{01}\rangle = \psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle - \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $|\psi'_{11}\rangle = -\psi_1\,|0\rangle + \psi_0\,|1\rangle$

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 ⇒ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: NÔT $|\psi'_{01}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $\hat{Z}\,|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $\hat{Z}$NÔT $|\psi'_{11}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

4.2.3 Quanten-Teleportation

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 $\Rightarrow$ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 $\Rightarrow$ Bob: $\hat{\text{NOT}}\,|\psi'_{01}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 10 $\Rightarrow$ Bob: $\hat{Z}\,|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 11 $\Rightarrow$ Bob: $\hat{Z}\hat{\text{NOT}}\,|\psi'_{11}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Diese vier Fälle können einfach zusammengefasst werden:

1. schaue das Bit b and und wenn $b = 1$, wende NOT an,
2. schaue das Bit a und wenn $a = 1$, wende Z an.

4.2.3 Quanten-Teleportation

Alice sendet nun Bob ihr Ergebnis $[ab]$, damit weiss Bob was er mit seinem Zustand machen muss

Alice: 00 ⇒ Bob: $\hat{1}\,|\psi'_{00}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 01 ⇒ Bob: $\hat{\mathrm{NOT}}\,|\psi'_{01}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 10 ⇒ Bob: $\hat{Z}\,|\psi'_{10}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Alice: 11 ⇒ Bob: $\hat{Z}\hat{\mathrm{NOT}}\,|\psi'_{11}\rangle = \psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle$

Diese vier Fälle können einfach zusammengefasst werden:

1. schaue das Bit b and und wenn $b = 1$, wende NOT an,
2. schaue das Bit a und wenn $a = 1$, wende Z an.

Teleportationsschaltkreis: