Vorlesung: Quantencomputing

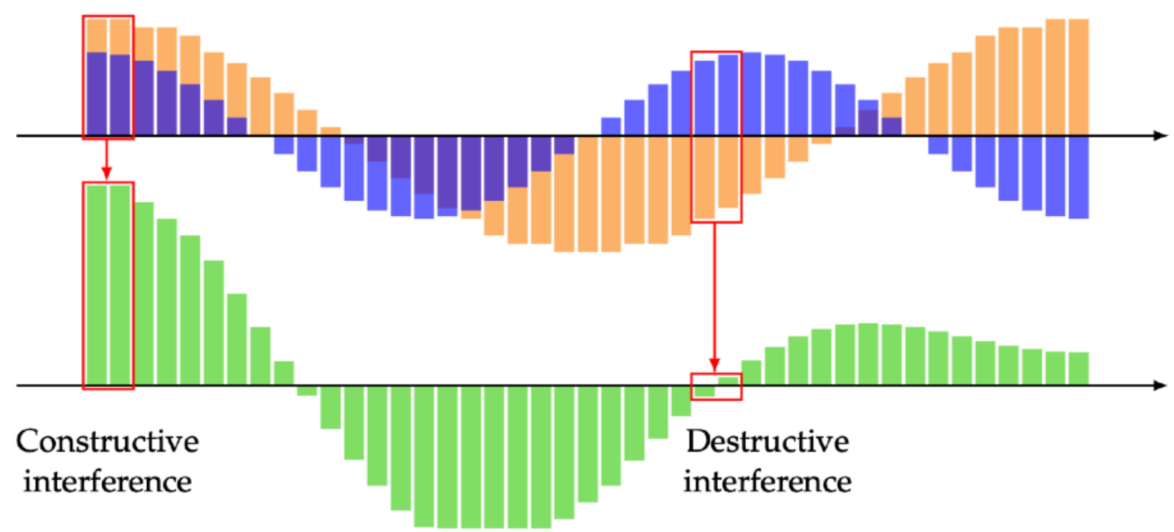
Mittwochsakademie

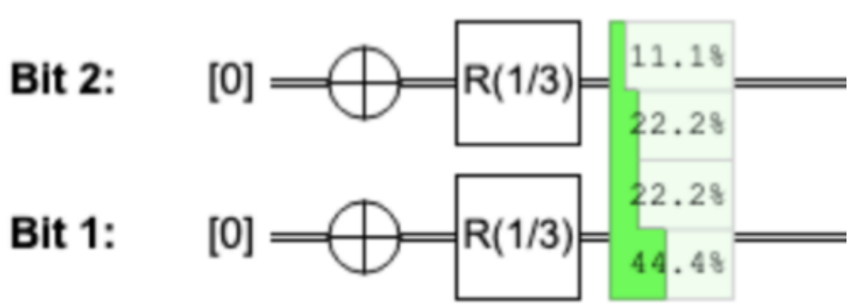
angelehnt an
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 3
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 1
28. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
4. 2.: Q5 Virtuose Algorithmen
Verabschiedung von Prof. Claus Grupen





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: $\hat{\text{NOT}}\,|0\rangle = |1\rangle \quad \hat{\text{NOT}}\,|1\rangle = |0\rangle$

Z-Operation: $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle \; \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$ **Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse**

Rotationen: $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = |\psi(\theta)\rangle$; $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = |\psi(\theta + \frac{\pi}{2})\rangle$

Allgemeinste Spiegelung $\hat{V}(\theta)$ **hat die Form:** $\hat{V}(\theta) =$ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

Hadamard Transformation $\hat{H}$ $\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ **NOT** $\hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$|+\rangle := \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) =: |+\rangle$$

$$|-\rangle := \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) =: |-\rangle$$

Wdh.: Motivation

Beispiel: Zufallszahlengenerator [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Der einfachste Quantenalgorithmus ist ein Zufallszahlengenerator, der echte Zufallszahlen erzeugt. Ein klassischer Rechner kann nur Pseudozufallszahlen berechnen.

Der folgende Quantenalgorithmus erzeugt eine Zufallszahl mit den Werten 0 oder 1. Er verwendet ein Quantenregister mit einem Qubit, ein Quantengatter und eine Messung.[2]

1. Initialisiere das Quantenregister $|x\rangle$ mit dem Basiszustand $|0\rangle$:
$$|x\rangle = |0\rangle$$
2. Wende ein Hadamard-Gatter auf das Quantenregister $|x\rangle$ an. Das Hadamard-Gatter erzeugt eine Superposition aus $|0\rangle$ und $|1\rangle$:
$$\begin{aligned} |x\rangle &\to H\,|x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle + |1\rangle\,\right) \end{aligned}$$
3. Messe das Quantenregister. Das Ergebnis $|0\rangle$ tritt mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf. Das Ergebnis $|1\rangle$ tritt ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf.

Wdh.: Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

Im Allgemeinen gilt aber: $\hat{U}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{U}$

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

Wdh.: Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = |-\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}|0\rangle = \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = |+\rangle$$

$$\hat{Z}\hat{H}|1\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = |+\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}|1\rangle = -\hat{H}|1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = -|-\rangle$$

Wdh.: Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |00\rangle &= |00\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |01\rangle &= |01\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |10\rangle &= |11\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |11\rangle &= |10\rangle\,, \end{aligned}$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |a,b\rangle = |a, a\oplus b\rangle\,.$$

Ebenso:

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ |a,b\rangle = |a\oplus b, b\rangle$$

2 Kontrollierte NOT Operationen hintereinander macht nichts:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a, a\oplus b\rangle = |a, a\oplus a\oplus b\rangle = |a,b\rangle$$

D.h.: $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}^{-1} = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}$

Wdh.: Kontrollierte Operationen

Man kann für jede Ein QuBit Operation $\hat{U}$ verallgemeinerte kontrollierte Operationen $C\hat{U}_{1\to 2}$ einführen:

$$
\begin{aligned}
CU_{1\to 2}\,|00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle\,,\\
CU_{1\to 2}\,|01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle\,,\\
CU_{1\to 2}\,|10\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|0\rangle\,,\\
CU_{1\to 2}\,|11\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|1\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man verschränkt

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Wir bestimmen wieder die Größe $\Delta(\psi) = \psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10}$

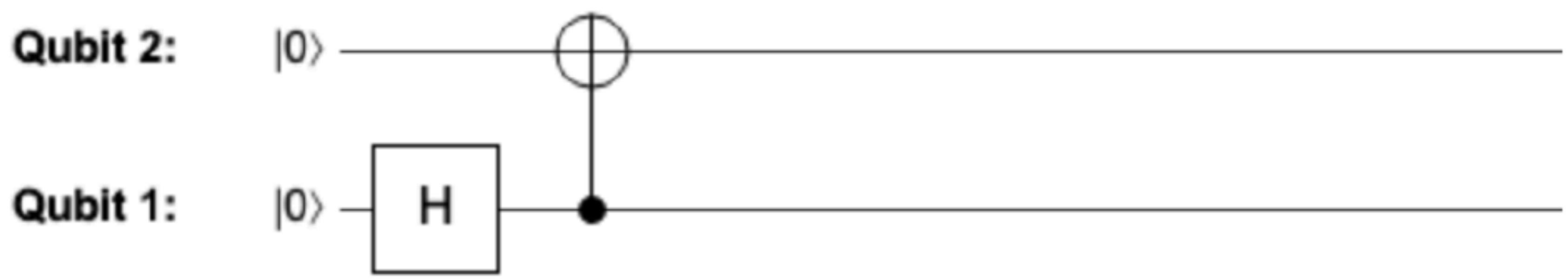
Es gilt: $|\psi\rangle$ **ist ein Produktzustand** $\Leftrightarrow \Delta(\psi) = 0$

Wdh.: Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

Erzeugung via Quirky:



Beweis:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)\,|00\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

$|\Phi^+\rangle$ **gehört zu einer Familie von 4 Zuständen die Bell-Zustände genannt werden**

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle,$$
$$\left|\Phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle.$$

Wir definieren folgende Operation: $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{N}}\textbf{OT}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$ **und finden**

$$\left|\Phi^+\right\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\left|00\right\rangle, \qquad \left|\Phi^-\right\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\left|10\right\rangle,$$
$$\left|\Psi^+\right\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\left|01\right\rangle, \qquad \left|\Psi^-\right\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\left|11\right\rangle.$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)\left|00\right\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle$$

Wdh.: Verschränkte Zustände

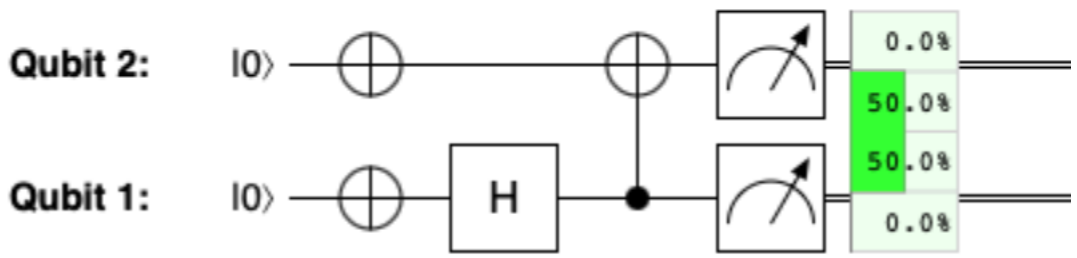
Übungsaufgabe 3.12: Bell Zustände vorbereiten

Zeichne, wie du die anderen drei Bell Zustände in QUIRKY konstruieren würdest: $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, and $|\Psi^-\rangle$.

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

$$|\Psi^-\rangle = U_{\text{Bell}}\,|11\rangle$$

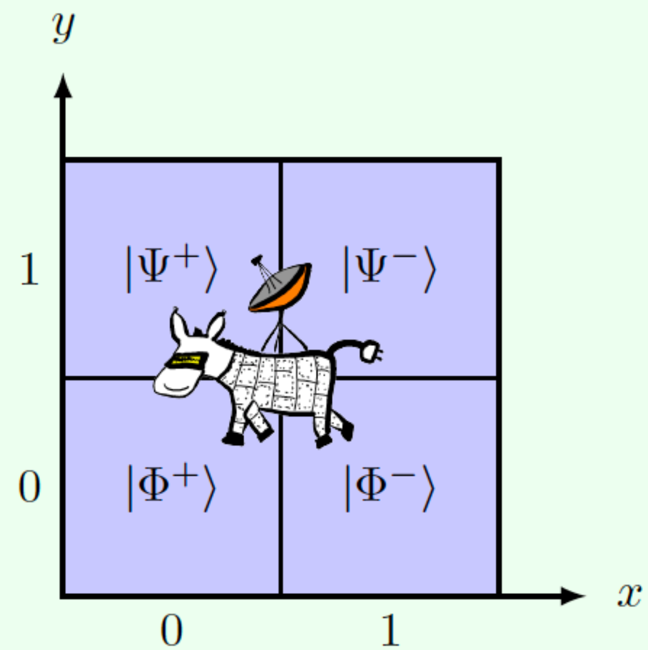
$$\hat{U}_{\mathbf{Bell}} := C\hat{\mathbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H}\otimes\hat{1})$$



Wdh.: Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

D.H.: Invertiere $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$

$$\hat{U}^{-1}_{\textbf{Bell}} := (\hat{H} \otimes \hat{1})C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}$$

$$\hat{H}|0\rangle = |+\rangle, \hat{H}|1\rangle = |-\rangle$$

$$\hat{H}^2|0\rangle = \hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|0\rangle) = |0\rangle$$

$$\hat{H}^2|1\rangle = \hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|1\rangle) = |0\rangle$$

Wdh.: Verschränkung und Korrelationen

Es gibt ausgeprägte Ähnlichkeiten zwischen korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und verschränkten Zuständen

Starte mit allgemeinem Ein QuBit zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Messung: mit Wahrscheinlichkeit ψ_i^2 **ergibt sich** $|i\rangle$

Dies kann durch die Wahrscheinlichleitsverteilung $\psi_0^2[0] + \psi_1^2[1]$ **modelliert werden**

Starte mit allgemeinem Zwei QuBit zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Messung: mit Wahrscheinlichkeit ψ_{ij}^2 **ergibt sich** $|ij\rangle$

Dies kann durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung

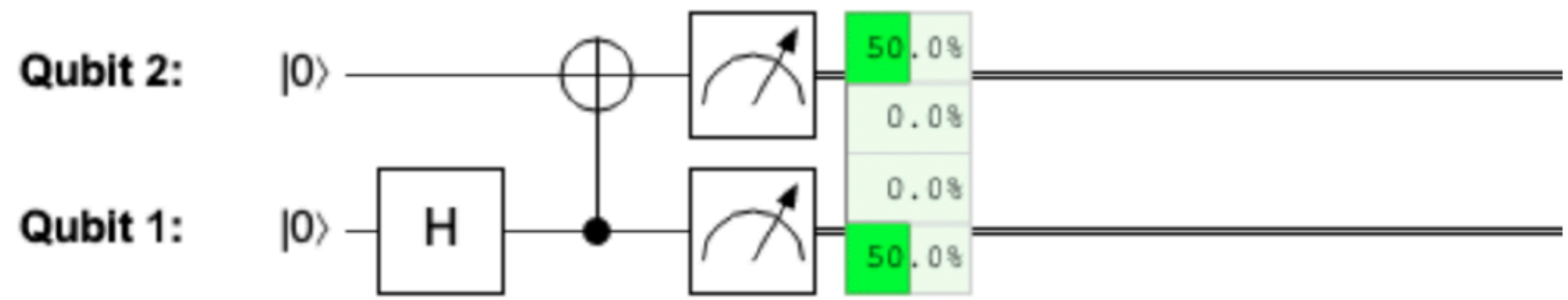
$\psi_{00}^2[00] + \psi_{01}^2[01] + \psi_{10}^2[10] + \psi_{11}^2[11]$ **modelliert werden**

Wdh.: Verschränkung und Korrelationen

Erzeugen wir den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ und messen ihn, dann erhalten wir ein perfekt korrelierten Paar von Zufallsbits

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Test:



Dasselbe gilt für $|\Phi^-\rangle$**:** $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

Für die Zustände $|\Psi^\pm\rangle$ **erhalten wir hingegen** $\frac{1}{2}[01] + \frac{1}{2}[10]$ **welches anti-korrelierte Bits beschreibt.**

Wdh.: Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ mit $\Delta(|\psi\rangle)$

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\ &= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\ &= \Delta(|\psi\rangle)\left(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\right) = 0.\end{aligned}$$

d.h. ist $\Delta(|\psi\rangle) = 0$, dann folgt daraus $\Delta(p) = 0$

Zu jeder gegeben Wahrscheinlichkeitsverteilung p können wir einfach einen Quantenzustand $|\psi\rangle$ finden, dass Messergebnis gemäß p verteilt ist.

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_{00}}\,|00\rangle + \sqrt{p_{01}}\,|01\rangle + \sqrt{p_{10}}\,|10\rangle + \sqrt{p_{11}}\,|11\rangle$$

d.h. Quantenzustände können alles was Wahrscheinlichkeitsverteilungen können

Wdh.: Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \to & |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\ |01\rangle \to & |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\ |10\rangle \to & |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle, \\ |11\rangle \to & |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

Kann Alice trotzdem die gesamte 2-QuBit Information übertragen? Klassisch: NEIN
Einfaches Senden des ersten oder 2 QuBits reicht nicht aus
Bob misst dies und danach ist der ursprüngliche Zustand verschwunden

Wdh.: Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0,0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
1. QuBit: $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0,1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$
1. QuBit: $\hat{\mathrm{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1,0\}$ **an**

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$
1. QuBit: $\hat{Z}_1\,\hat{\mathrm{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1,1\}$ **an**

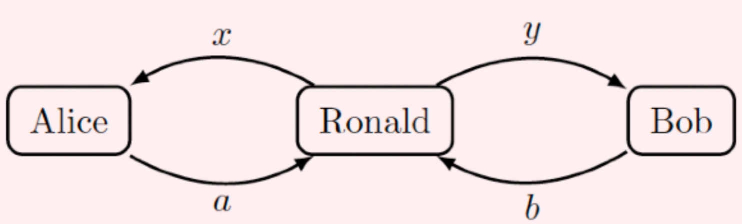
Dann sendet Alice Ihr QBuit an Bob und der hat den gesamten Zustand
und kann des gesamten Zustand extrahieren (Ü 3.13)

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

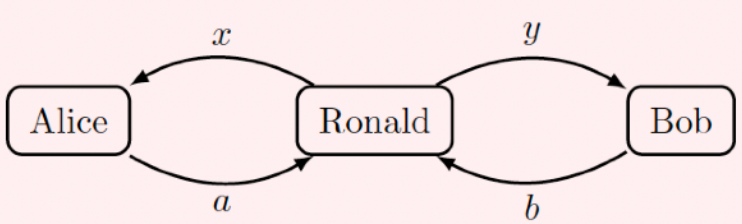
Es gibt 4 Möglichkeiten

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

Es gibt 4 Möglichkeiten

I) $f(0) = 0, f(1) = 0$

II) $f(0) = 1, f(1) = 0$

III) $f(0) = 0, f(1) = 1$

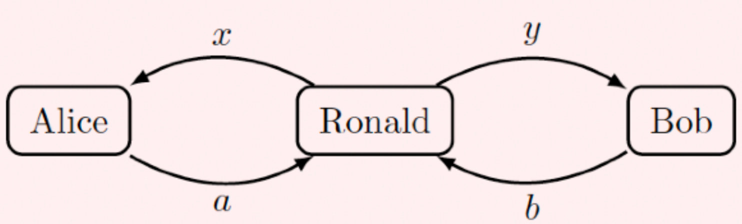
IV) $f(0) = 1, f(1) = 1$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

Es gibt 4 Möglichkeiten

I) $f(0) = 0, f(1) = 0$

II) $f(0) = 1, f(1) = 0$

III) $f(0) = 0, f(1) = 1$

IV) $f(0) = 1, f(1) = 1$

Ebenso für g, d.h. 16 Möglichkeiten

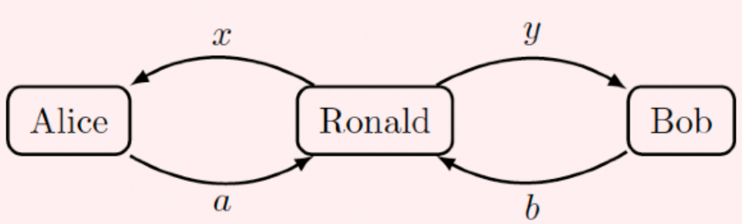
-> alle ausschreiben,

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

Es gibt 4 Möglichkeiten

I) $f(0) = 0, f(1) = 0$

II) $f(0) = 1, f(1) = 0$

III) $f(0) = 0, f(1) = 1$

IV) $f(0) = 1, f(1) = 1$

Ebenso für g, d.h. 16 Möglichkeiten

-> alle ausschreiben,

z.B. $I \otimes III$ **,** $II \otimes IV$**,** $II \otimes III$

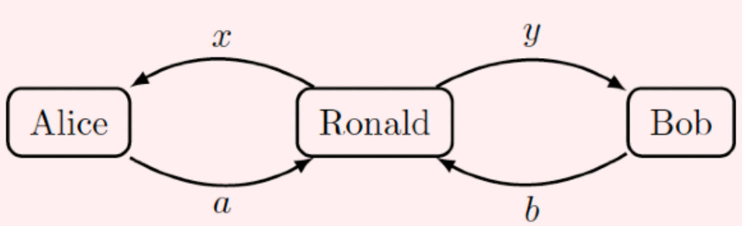
liefern 75%

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

Als Nächstes erwägen sie es, ihre Antworten zu berechnen mittels geteiltem Zufall. Bob schlägt vor, kompliziertere Funktionen f und g mit einem zusätzlichen binären Eingabebit zu verwenden und die Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x, r)$ und $b = g(y, s)$. Hier sind r und s zwei zufällige Bits die gemeinsam einer Zwei-Bit Zufallsverteilung entsprangen.

2. Zeige, dass die Beiden noch immer nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% gewinnen können, egal welche Funktionen f und g sie benutzen und was die Zufallsverteilung für r und s ist.

Langsam wird den Beiden bewusst, dass Ronald sicherlich eine quantenmechanische Strategie im Kopf hatte. Alice hat eine geniale Idee und schlägt vor, dass sie und Bob sich einen maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ bevor das Spiel startet teilen. Sie schlägt vor, dass wenn sie ihre Bits erhalten, sie ihr Qubit rotiert mittels einem Winkel θ_x (welcher von ihrem Eingabebit x abhängt) und dann misst um ihre Antwort a zu erhalten. Bob stattdessen soll anhand eines anderen Winkels ω_y rotieren (welcher von seinem Eingabebit y abhängt) und dann messen um seine Antwort b zu erhalten.

3. Schreibe den Zustand nach den Rotationen von Alice und Bob auf. Der Zustand soll von der Form (3.30) sein. Bestätige, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von der folgenden Form ist:

$$\frac{1}{4}\left(\cos^2(\theta_0 - \omega_0) + \cos^2(\theta_0 - \omega_1) + \cos^2(\theta_1 - \omega_0) + \sin^2(\theta_1 - \omega_1)\right).$$

Hinweis: Benutze die trigonometrischen Formeln aus Gl. (2.16) und (2.22).

Alice und Bob finden schnell heraus, dass $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \pi/4$, und $\omega_0 = \pi/8$ gute Wahlen sind. Sie haben jedoch Probleme mit dem letzten Winkel und die Zeit läuft ab.

4. Finde eine Winkel ω_1, sodass die Beiden mit einer Wahrscheinlichkeit gewinnen, die höher als 75% ist.

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

QM: verletzt Bell-Ungleichung, mehr als 75%

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

QM: verletzt Bell-Ungleichung, mehr als 75%

- dies ist experimentell bewiesen, z.B. Alan Aspect

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

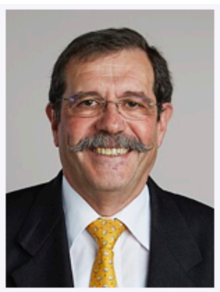
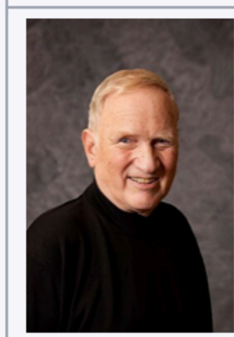
Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

QM: verletzt Bell-Ungleichung, mehr als 75%

- dies ist experimentell bewiesen, z.B. Alan Aspect

2022		Alain Aspect (b. 1947)	French	"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"
		John Clauser (b. 1942)	American	
		Anton Zeilinger (b. 1945)	Austrian	

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

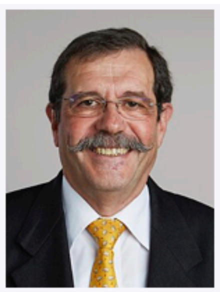
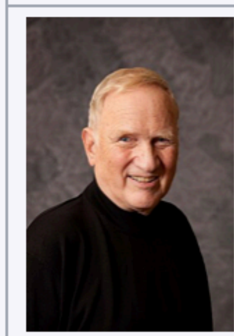
Klassisch: Maximal 75% Gewinnwahrscheinlichkeit - Beispiel für Bell-Ungleichung

John Stewart Bell; 1928-1990; 1964 Ungleichung

Obiges Spiel: John Clauser, Michael Horne, Abner Shimoney, Richard Holt

QM: verletzt Bell-Ungleichung, mehr als 75%

- dies ist experimentell bewiesen, z.B. Alan Aspect

2022		Alain Aspect (b. 1947)	French	"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"
		John Clauser (b. 1942)	American	
		Anton Zeilinger (b. 1945)	Austrian	

Kann auch als Beweis genutzt werden, dass man einen echten Quantencomputer hat!

Man spielt das Spiel und bei > 75% war es ein QC :-)

4 Quantenkompositionen

Bisher:
1 und 2 QuBits, jetzt viele QuBits

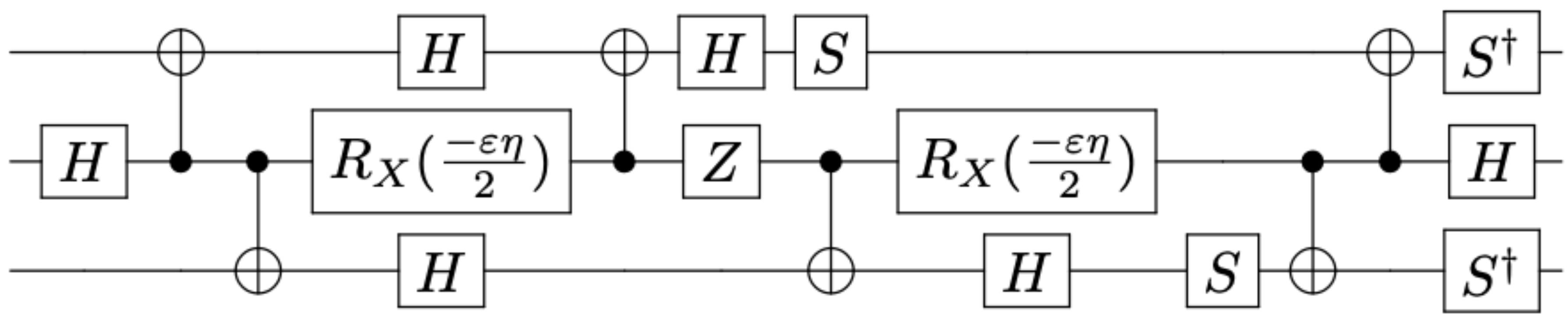
Verschränkte Zustände:
- **effektivere Kommunikation**
- **Bessere Gewinnstrategien**

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt

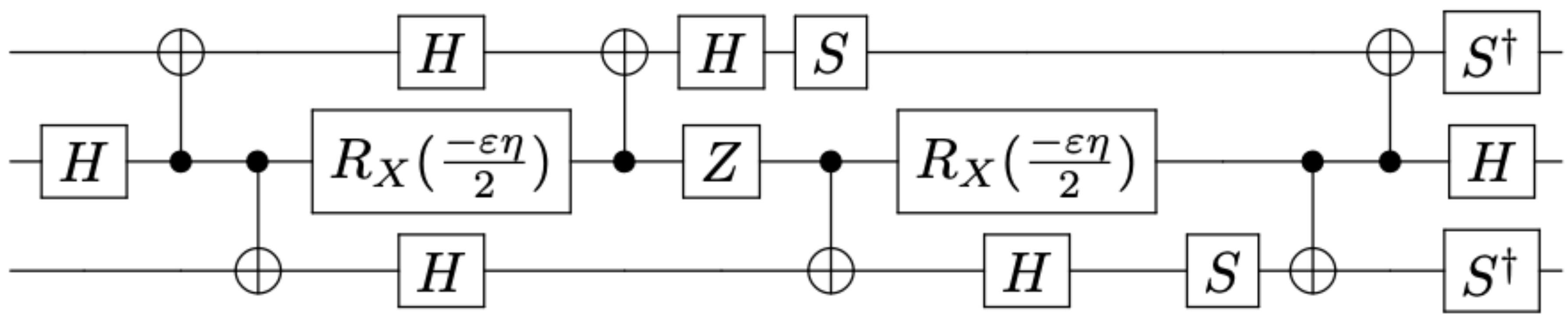
4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



4.1 Quantenschaltungen

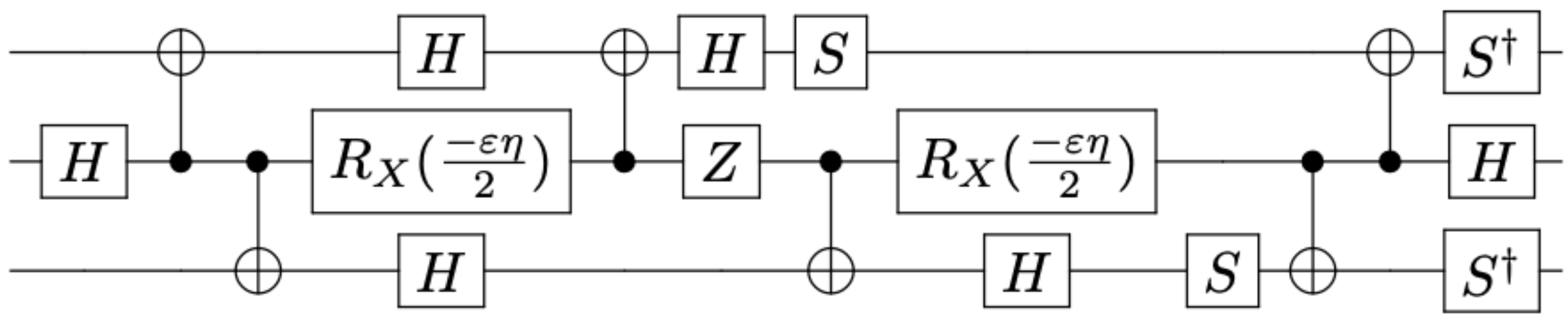
Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt

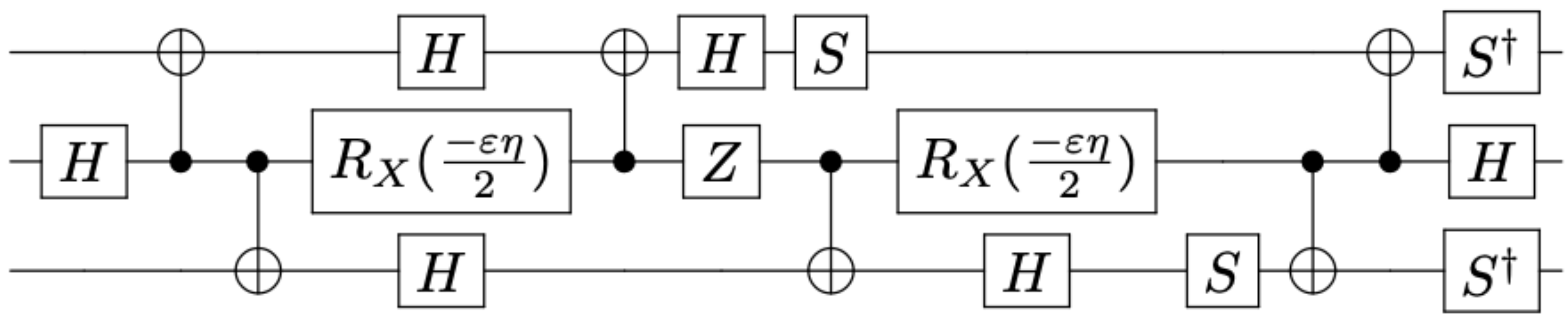


Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



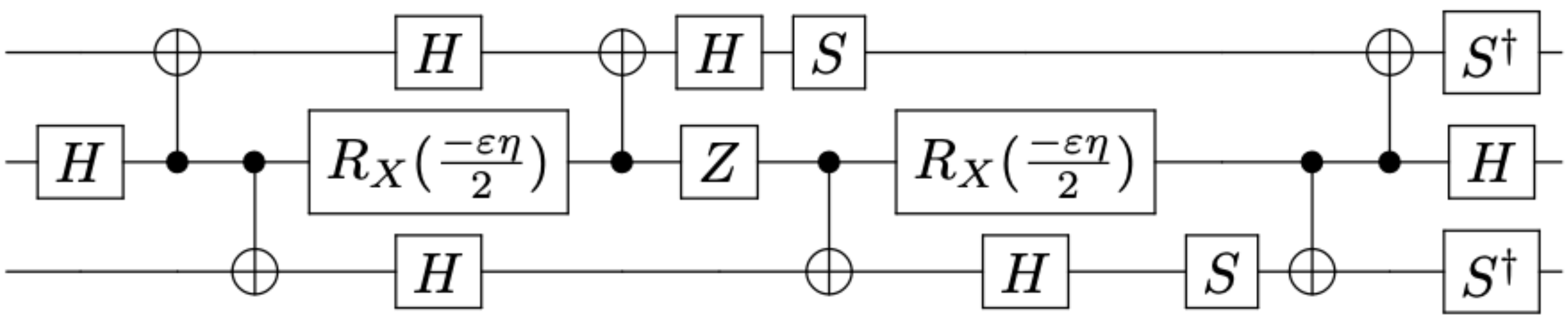
Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



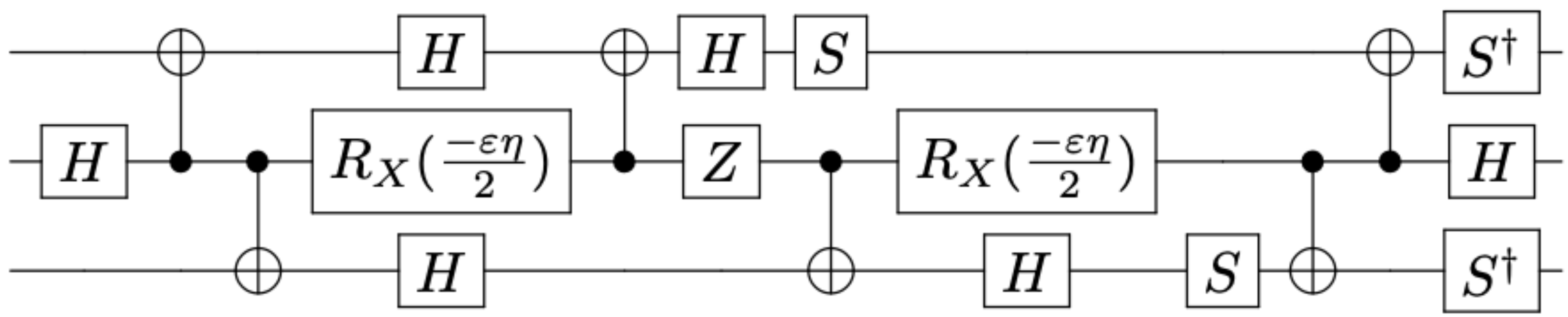
Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$
2. **Quantenoperationen: meist 1 oder 2 QuBits gleichzeitig involviert**

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



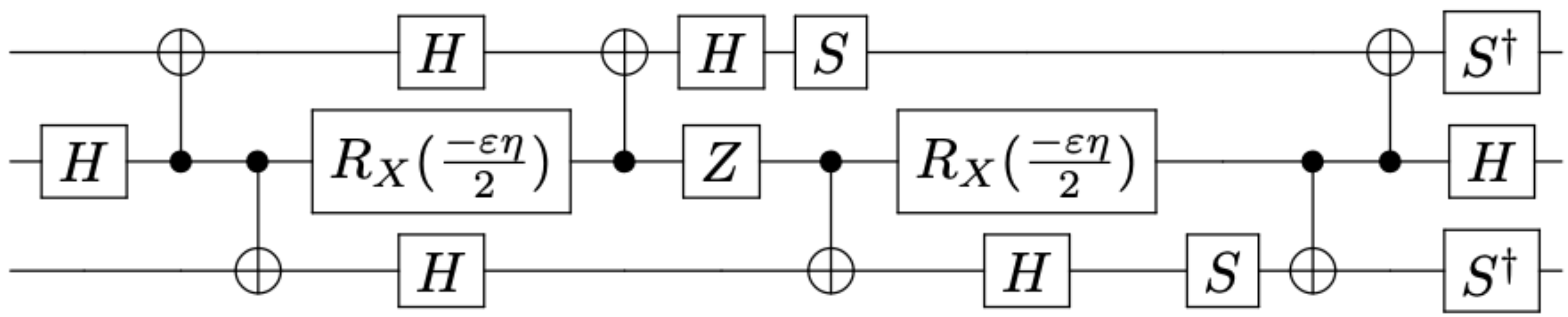
Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$
2. **Quantenoperationen: meist 1 oder 2 QuBits gleichzeitig involviert**
3. **Messungen, um QuBits auszulesen**

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

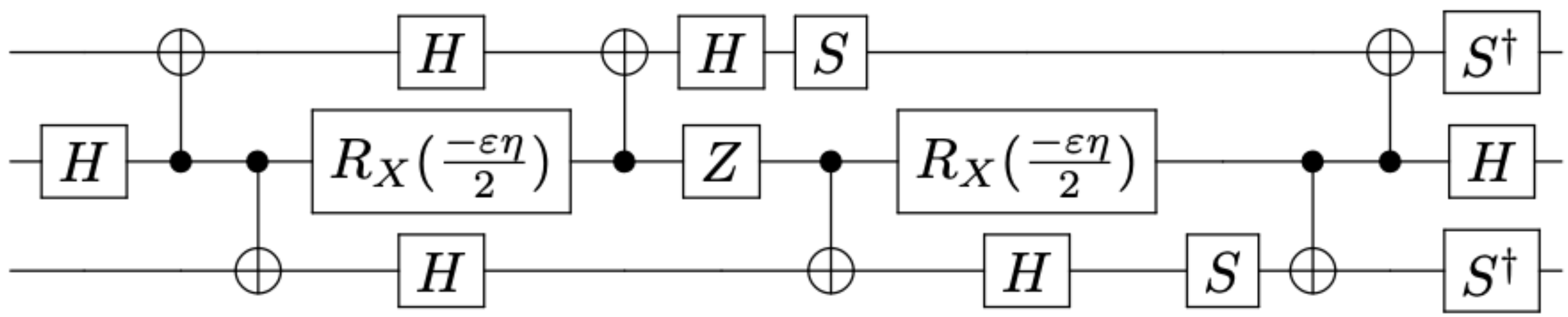
Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$
2. **Quantenoperationen: meist 1 oder 2 QuBits gleichzeitig involviert**
3. **Messungen, um QuBits auszulesen**

(Siehe Quirky)

4.1 Quantenschaltungen

Bildliche Darstellung: welche Operation wird an welchen Qubit durchgeführt



Beispiel: Simulation einer vereinfachten Theorie des Elektromagnetismus

Formal besteht eine Quantenschaltung aus 3 Teilen:

1. **Initialzustand: typischerweise** $|0\rangle$
2. **Quantenoperationen: meist 1 oder 2 QuBits gleichzeitig involviert**
3. **Messungen, um QuBits auszulesen**

(Siehe Quirky)
Die Operationen werden oft auch als Gatter oder Gates bezeichnet
z.B.: Hadamard-Operation $\equiv$ Hadamard-Gatter $\equiv$ Hadamard-Gate

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit drei QuBits

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit drei QuBits

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = {} & \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle \\
& + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle\,,
\end{aligned}
$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit drei QuBits

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{011}|011\rangle \\ + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle,\end{aligned}$$

Es muss gelten:

$$\psi_{000}^2 + \psi_{001}^2 + \psi_{010}^2 + \psi_{011}^2 + \psi_{100}^2 + \psi_{101}^2 + \psi_{110}^2 + \psi_{111}^2 = 1.$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit drei QuBits

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = {} & \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle \\
& + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Es muss gelten:

$$
\psi_{000}^2 + \psi_{001}^2 + \psi_{010}^2 + \psi_{011}^2 + \psi_{100}^2 + \psi_{101}^2 + \psi_{110}^2 + \psi_{111}^2 = 1.
$$

Mögliche Darstellung:

$$
|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{000} \\ \psi_{001} \\ \psi_{010} \\ \psi_{011} \\ \psi_{100} \\ \psi_{101} \\ \psi_{110} \\ \psi_{111} \end{pmatrix}.
$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits:

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00...00}\,|00\ldots00\rangle + \psi_{00...01}\,|00\ldots01\rangle + \ldots + \psi_{11...11}\,|11\ldots11\rangle$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00\ldots00}\,|00\ldots00\rangle + \psi_{00\ldots01}\,|00\ldots01\rangle + \ldots + \psi_{11\ldots11}\,|11\ldots11\rangle$$

Es muss gelten:

$$\psi_{00\ldots00}^2 + \psi_{00\ldots01}^2 + \ldots + \psi_{11\ldots11}^2 = 1$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00...00}\,|00\ldots00\rangle + \psi_{00...01}\,|00\ldots01\rangle + \ldots + \psi_{11...11}\,|11\ldots11\rangle$$

Es muss gelten:

$$\psi_{00...00}^2 + \psi_{00...01}^2 + \ldots + \psi_{11...11}^2 = 1$$

Mögliche Darstellung als Vektor in einem 2^n dimensionalen Vektorraum.

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00\ldots 00}\,|00\ldots 00\rangle + \psi_{00\ldots 01}\,|00\ldots 01\rangle + \ldots + \psi_{11\ldots 11}\,|11\ldots 11\rangle$$

Es muss gelten:

$$\psi_{00\ldots 00}^2 + \psi_{00\ldots 01}^2 + \ldots + \psi_{11\ldots 11}^2 = 1$$

Mögliche Darstellung als Vektor in einem 2^n dimensionalen Vektorraum.

Bei $n = 300$ gibt es $2^{300} \approx 2 \cdot 10^{91}$ Amplitude (mehr als Atome im Universum)

4.1.1 Viele Quantenbits

Beliebiger Zustand mit n QuBits: 2^n Basis Elemente

$$|\psi\rangle = \psi_{00...00}\,|00\ldots00\rangle + \psi_{00...01}\,|00\ldots01\rangle + \ldots + \psi_{11...11}\,|11\ldots11\rangle$$

Es muss gelten:

$$\psi_{00...00}^2 + \psi_{00...01}^2 + \ldots + \psi_{11...11}^2 = 1$$

Mögliche Darstellung als Vektor in einem 2^n dimensionalen Vektorraum.

Bei $n = 300$ gibt es $2^{300} \approx 2 \cdot 10^{91}$ Amplitude (mehr als Atome im Universum) d.h. sowas kann nicht klassisch gespeichert werden, aber als Quanten Computer gebaut!

4.1.1 Viele Quantenbits

Mit dem Tensorprodukt können Zustände beschrieben werden, die zu kombinierten QuBits gehören, allgemein:

$$|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes |b_1, \ldots, b_m\rangle = |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle \,.$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Mit dem Tensorprodukt können Zustände beschrieben werden, die zu kombinierten QuBits gehören, allgemein:

$$|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes |b_1, \ldots, b_m\rangle = |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle \, .$$

Beispiel 1: $|101\rangle \otimes |01\rangle = |10101\rangle$

4.1.1 Viele Quantenbits

Mit dem Tensorprodukt können Zustände beschrieben werden, die zu kombinierten QuBits gehören, allgemein:

$$|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes |b_1, \ldots, b_m\rangle = |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle \,.$$

Beispiel 1: $|101\rangle \otimes |01\rangle = |10101\rangle$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
&|\Phi^+\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |11\rangle \\
&= \frac{1}{2}|0000\rangle + \frac{1}{2}|0011\rangle + \frac{1}{2}|1100\rangle + \frac{1}{2}|1111\rangle \,.
\end{aligned}$$

4.1.1 Viele Quantenbits

Mit dem Tensorprodukt können Zustände beschrieben werden, die zu kombinierten QuBits gehören, allgemein:

$$|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes |b_1, \ldots, b_m\rangle = |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle \,.$$

Beispiel 1: $|101\rangle \otimes |01\rangle = |10101\rangle$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
&|\Phi^+\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \otimes |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \otimes |11\rangle \\
&= \frac{1}{2}|0000\rangle + \frac{1}{2}|0011\rangle + \frac{1}{2}|1100\rangle + \frac{1}{2}|1111\rangle \,.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.1: Tensorprodukt der Bell-Zustände

Berechne das Tensorprodukt $|\Phi^-\rangle \otimes |\Psi^-\rangle$ der zwei Bell-Zustände aus Gl. (3.53) und (3.55).

4.1.2 Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n \rangle = \hat{U} \,|\, a_1 \rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

4.1.2 Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n\rangle = \hat{U} \,|\, a_1\rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n\rangle$$

Analoge Definitionen für $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$,…

4.1.2 Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n \rangle = \hat{U} \,|\, a_1 \rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

Analoge Definitionen für $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$,…

Übungsaufgabe 4.2: Eine Ein-Qubit-Operation anwenden

Berechne das Ergebnis der Anwendung der Hadamard-Operation auf das zweite Qubit des Drei-Qubit-Zustands $|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle$. Anders gesagt, berechne $H_2\left(|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle\right)$. Schreibe dein Ergebnis in der Form aus Gl. (4.1).

4.1.2 Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n \rangle = \hat{U} \,|\, a_1 \rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

Analoge Definitionen für $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$,...

Übungsaufgabe 4.2: Eine Ein-Qubit-Operation anwenden

Berechne das Ergebnis der Anwendung der Hadamard-Operation auf das zweite Qubit des Drei-Qubit-Zustands $|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle$. Anders gesagt, berechne $H_2\left(|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle\right)$. Schreibe dein Ergebnis in der Form aus Gl. (4.1).

$$|\,\Phi^+\rangle \otimes |\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,001\rangle + |\,111\rangle\right)$$

4.1.2 Operationen

1 QuBit-Operationen $\hat{U}$ wirken wie folgt:

$$\hat{U}_1 \,|\, a_1, \ldots, a_n\rangle = \hat{U} \,|\, a_1\rangle \otimes |\, a_2, \ldots, a_n\rangle$$

Analoge Definitionen für $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$,...

Übungsaufgabe 4.2: Eine Ein-Qubit-Operation anwenden

Berechne das Ergebnis der Anwendung der Hadamard-Operation auf das zweite Qubit des Drei-Qubit-Zustands $|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle$. Anders gesagt, berechne $H_2\,(|\Phi^+\rangle \otimes |1\rangle)$. Schreibe dein Ergebnis in der Form aus Gl. (4.1).

$$|\,\Phi^+\rangle \otimes |\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,001\rangle + |\,111\rangle\big)$$

$$\hat{H}_2 \,|\,\Phi^+\rangle \otimes |\,1\rangle = \frac{1}{2}\big(\,|\,001\rangle + |\,011\rangle + |\,101\rangle - |\,111\rangle\big)$$

4.1.2 Operationen

2 QuBit-Operationen $\mathbf{C\hat{N}OT}_{i\to k}$ wirken wie folgt:

$$\mathbf{C\hat{N}OT}_{i\to k}\,|\,a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n\rangle = |\,a_1,\ldots,a_i \oplus a_k,\ldots,a_n\rangle$$

4.1.2 Operationen

2 QuBit-Operationen $\text{C}\hat{\text{N}}\text{OT}_{i \to k}$ wirken wie folgt:

$$\text{C}\hat{\text{N}}\text{OT}_{i \to k} \, | \, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n \rangle = | \, a_1, \ldots, a_i \oplus a_k, \ldots, a_n \rangle$$

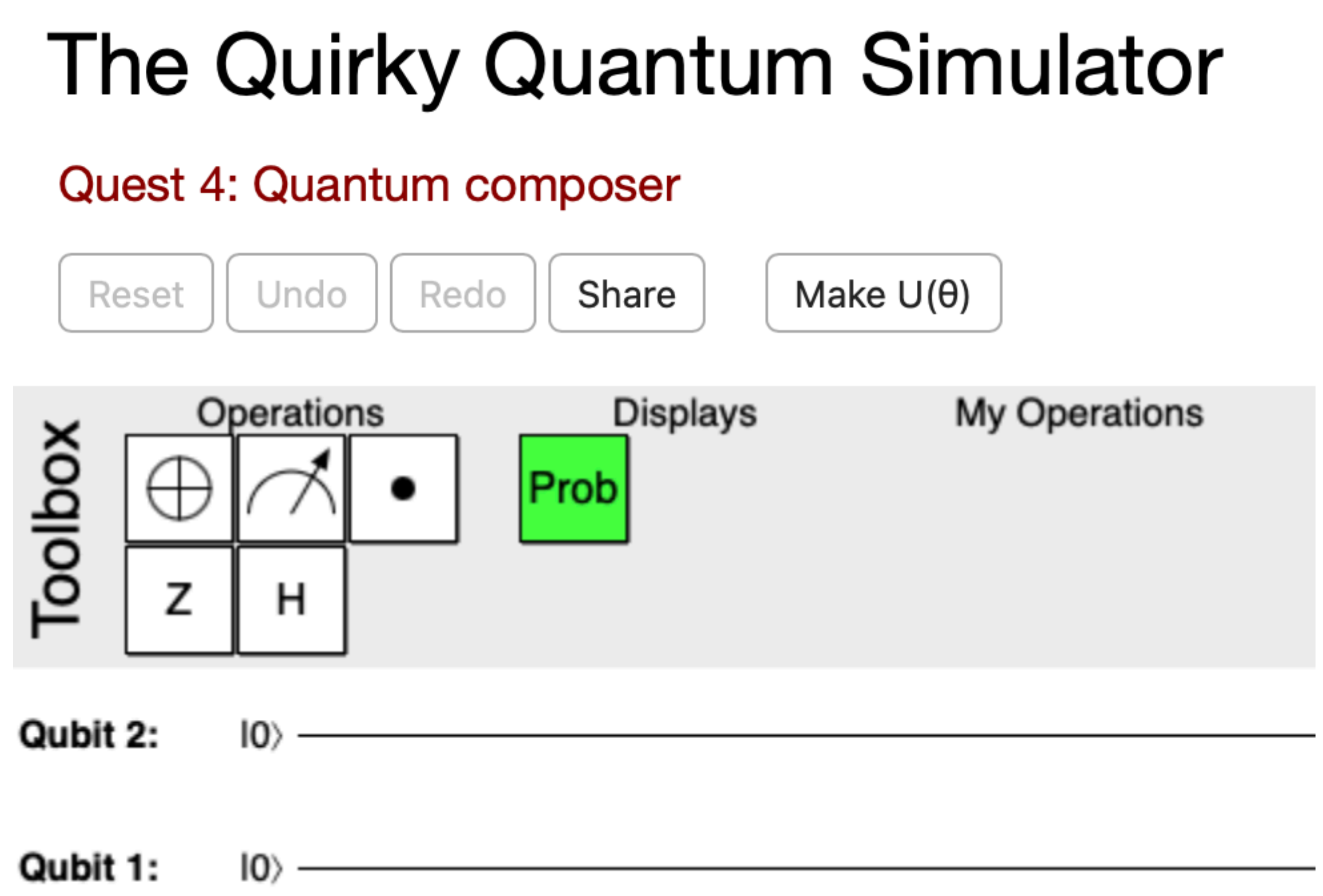
Quirky: Quest 4

4.1.2 Operationen

2 QuBit-Operationen $\hat{\text{CNOT}}_{i\to k}$ wirken wie folgt:

$$\hat{\text{CNOT}}_{i\to k}\,|\,a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n\rangle = |\,a_1,\ldots,a_i \oplus a_k,\ldots,a_n\rangle$$

Quirky: Quest 4

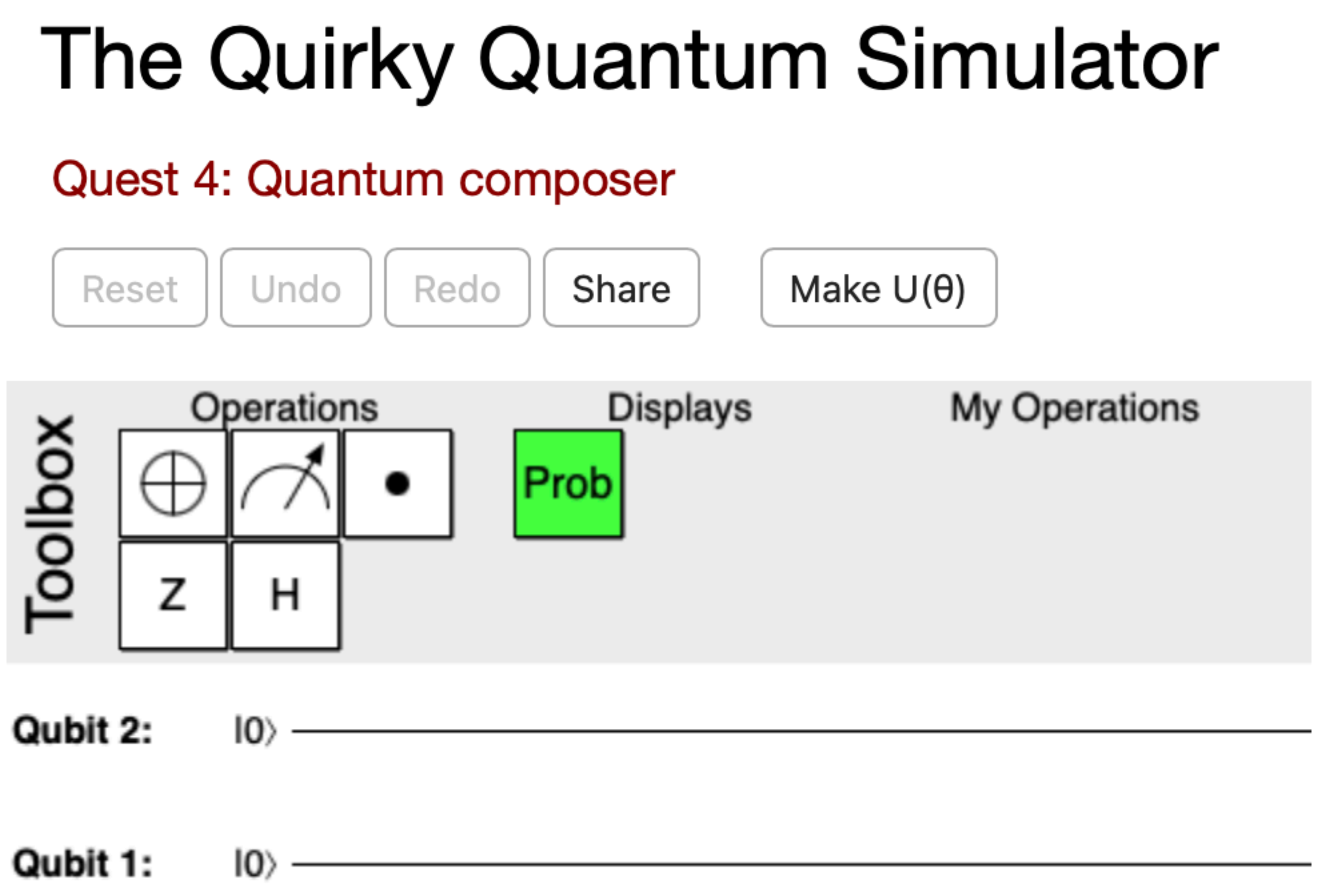


4.1.2 Operationen

2 QuBit-Operationen $\hat{\text{CNOT}}_{i\to k}$ wirken wie folgt:

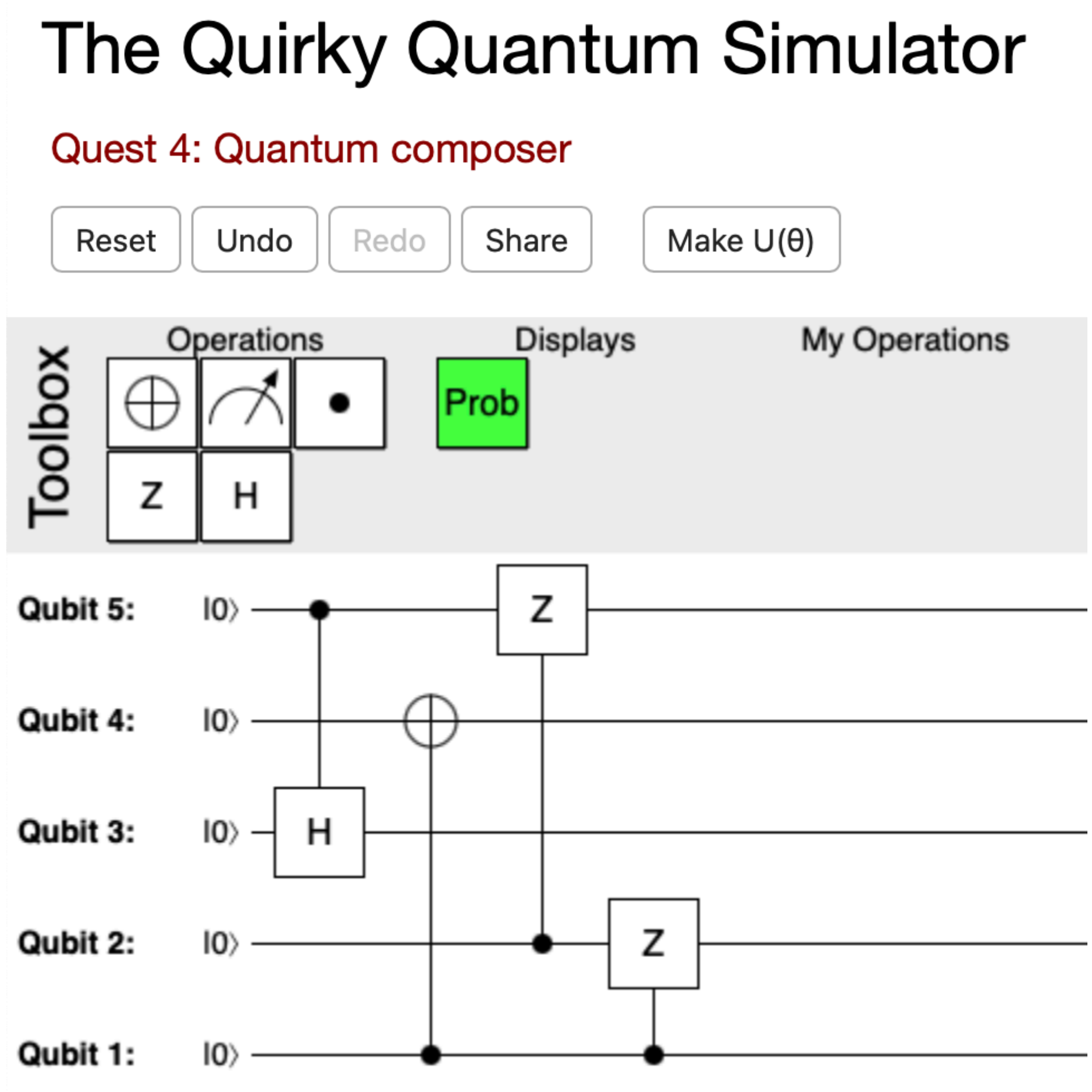
$$\hat{\text{CNOT}}_{i\to k}\,|\,a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n\rangle = |\,a_1,\ldots,a_i\oplus a_k,\ldots,a_n\rangle$$

Quirky: Quest 4



Auf den ersten Blick: wie vorher
aber wenn man auf Operation klickt, dann erscheint 3. Linie

4.1.2 Operationen



4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V) \left|a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\right\rangle = U \left|a_1, \ldots, a_n\right\rangle \otimes V \left|b_1, \ldots, b_m\right\rangle,$$

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V) |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle = U |a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes V |b_1, \ldots, b_m\rangle \, ,$$

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U |\alpha\rangle \otimes V |\beta\rangle \, ,$$

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V) |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle = U |a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes V |b_1, \ldots, b_m\rangle ,$$

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U |\alpha\rangle \otimes V |\beta\rangle ,$$

Beispiele:

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V) |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle = U |a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes V |b_1, \ldots, b_m\rangle ,$$

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U |\alpha\rangle \otimes V |\beta\rangle ,$$

Beispiele:

1. $I \otimes I \otimes U \otimes I$ ist die selbe Vier-Qubit-Operation wie U_3,

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V)\,|a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle = U\,|a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes V\,|b_1, \ldots, b_m\rangle\,,$$

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U\,|\alpha\rangle \otimes V\,|\beta\rangle\,,$$

Beispiele:

1. $I \otimes I \otimes U \otimes I$ ist die selbe Vier-Qubit-Operation wie U_3,
2. $I \otimes \mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I \otimes I$ ist die kontrollierte-NOT-Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 3}$ für fünf Qubits,

4.1.2 Operationen

Wenn Operationen auf verschiedene QuBits wirken, können wir sie parallel ausführen

$$(U \otimes V) |a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle = U |a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes V |b_1, \ldots, b_m\rangle \,,$$

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U |\alpha\rangle \otimes V |\beta\rangle \,,$$

Beispiele:

1. $I \otimes I \otimes U \otimes I$ ist die selbe Vier-Qubit-Operation wie U_3,
2. $I \otimes \mathrm{CNOT}_{1\to 2} \otimes I \otimes I$ ist die kontrollierte-NOT-Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 3}$ für fünf Qubits,
3. $Z \otimes I \otimes X$ ist die Quantenoperation, welche Z auf das erste Qubit, und parallel X auf das dritte Qubit anwendet (wir könnten die Operation auch als $Z_1 X_3$ oder $X_3 Z_1$ schreiben).

4.1.2 Operationen

Übungsaufgabe 4.3: Versetzte Tensorprodukte

Betrachte den Drei-Qubit-Zustand $(\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \otimes I)(|0\rangle \otimes |\Phi^-\rangle)$.

1. Wie kannst du diesen Zustand mit QUIRKY erstellen?

2. Schreibe den Zustand in der Form aus Gl. (4.1).

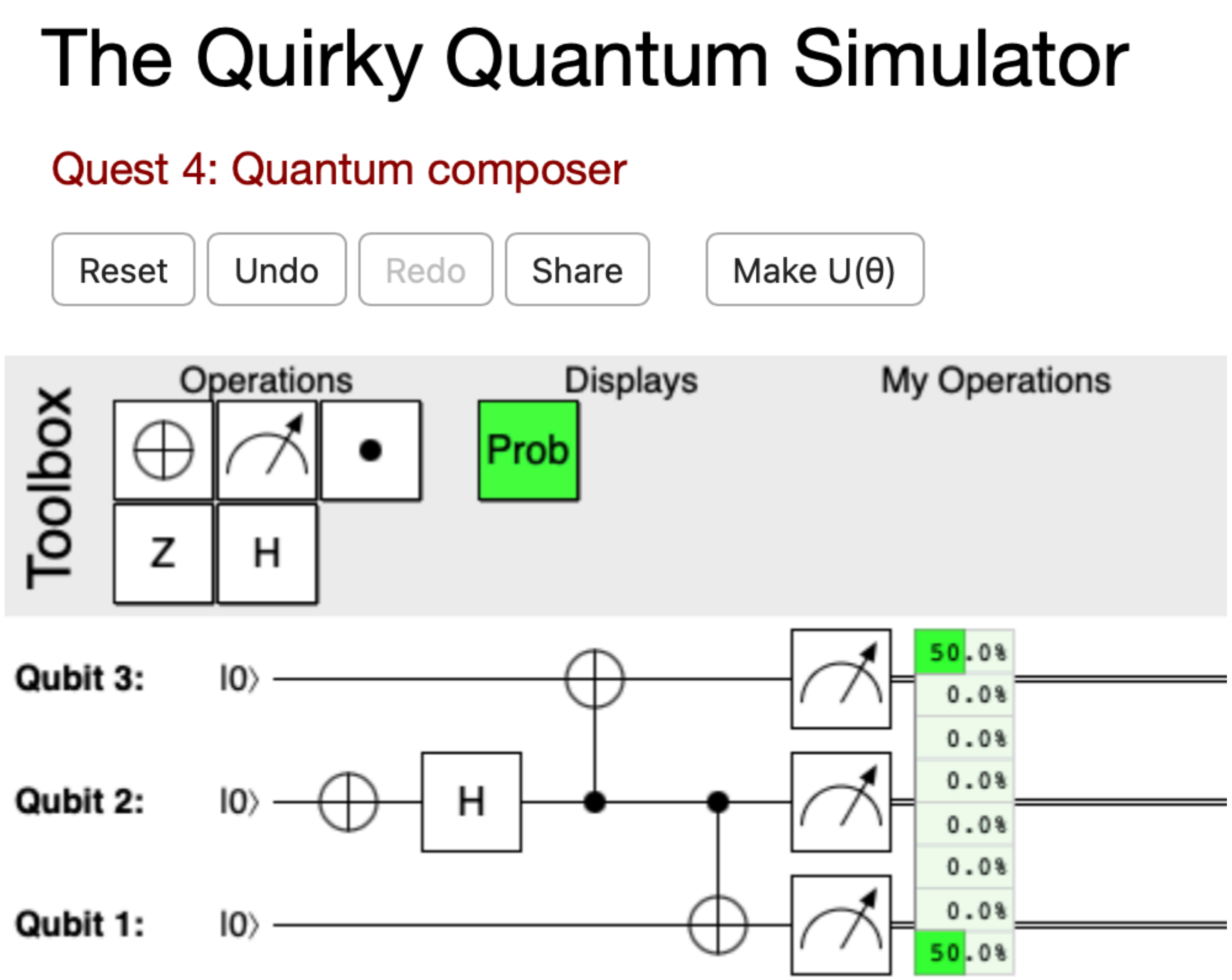
4.1.2 Operationen

Übungsaufgabe 4.3: Versetzte Tensorprodukte

Betrachte den Drei-Qubit-Zustand $(\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \otimes I)(|0\rangle \otimes |\Phi^-\rangle)$.

1. Wie kannst du diesen Zustand mit QUIRKY erstellen?

2. Schreibe den Zustand in der Form aus Gl. (4.1).

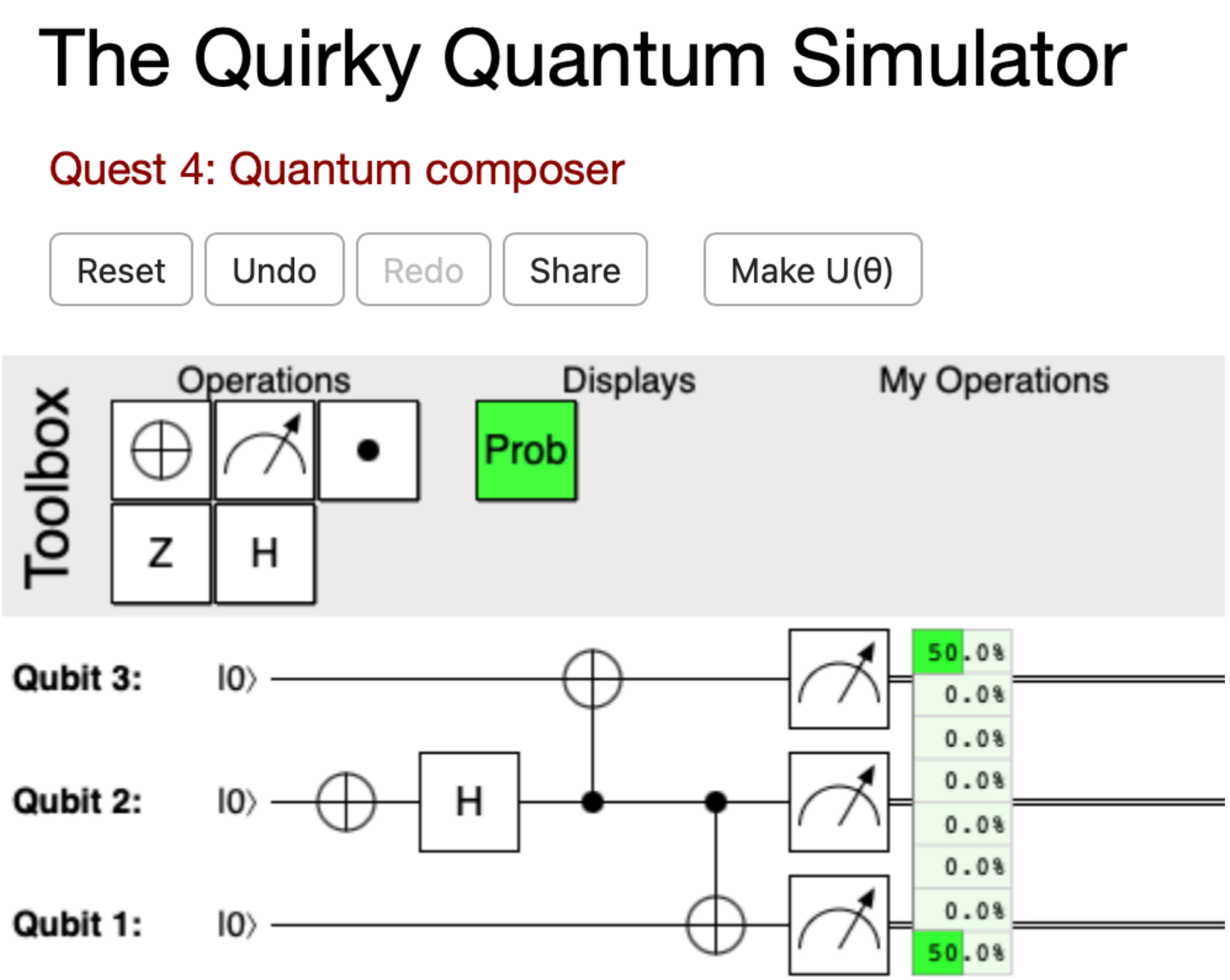


4.1.2 Operationen

Übungsaufgabe 4.3: Versetzte Tensorprodukte

Betrachte den Drei-Qubit-Zustand $(\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \otimes I)(|0\rangle \otimes |\Phi^-\rangle)$.

1. Wie kannst du diesen Zustand mit QUIRKY erstellen?
2. Schreibe den Zustand in der Form aus Gl. (4.1).



$$\hat{\mathrm{CNOT}}_{2\to 1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |011\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |111\rangle\right)$$

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**
2. **Sie bildet Quantenzustände auf Quantenzustände ab (Normierung)**

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**
2. **Sie bildet Quantenzustände auf Quantenzustände ab (Normierung)**
3. **Sie ist invertierter (reversibel)**

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**
2. **Sie bildet Quantenzustände auf Quantenzustände ab (Normierung)**
3. **Sie ist invertierter (reversibel)**

Übungsaufgabe 4.4: Toffoli **CCNOT**

Definiere die Toffoli-Operation auf drei Qubits durch

$$T\,|a,b,c\rangle = |a,b,c \oplus ab\rangle$$

auf Basiszuständen (ab ist dabei das Produkt der zwei Bits $a, b \in \{0, 1\}$, und $\oplus$ wurde in Gl. (3.20) definiert), und erweitere sie durch Linearität auf beliebige Drei-Qubit-Zustände. Zeige, dass T alle Quantenzustände auf Quantenzustände abbildet, und dass T invertierbar ist.

Bemerkung: T invertiert das dritte Bit genau dann, wenn beide ersten Bits beide eins sind – es ist also eine "zweifach-kontrollierte"-NOT-Operation.

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

Die allgemeinste Quantenoperation hat folgende Eigenschaften:

1. **Sie ist linear**
2. **Sie bildet Quantenzustände auf Quantenzustände ab (Normierung)**
3. **Sie ist invertierter (reversibel)**

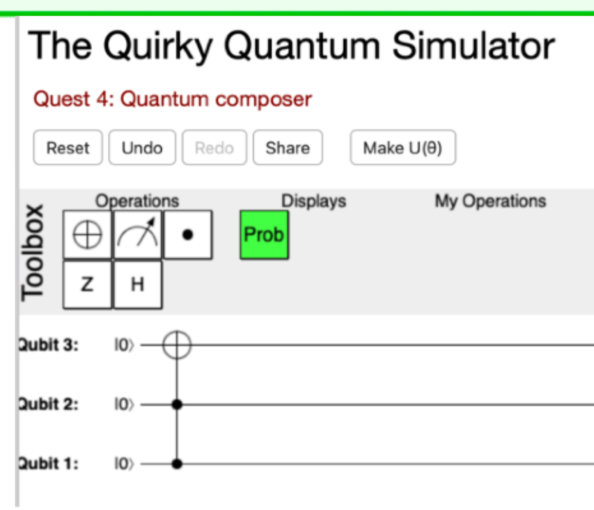
Übungsaufgabe 4.4: Toffoli **CCNOT**

Definiere die Toffoli-Operation auf drei Qubits durch

$$T\,|a,b,c\rangle = |a,b,c \oplus ab\rangle$$

auf Basiszuständen (ab ist dabei das Produkt der zwei Bits $a, b \in \{0,1\}$, und $\oplus$ wurde in Gl. (3.20) definiert), und erweitere sie durch Linearität auf beliebige Drei-Qubit-Zustände. Zeige, dass T alle Quantenzustände auf Quantenzustände abbildet, und dass T invertierbar ist.

Bemerkung: T invertiert das dritte Bit genau dann, wenn beide ersten Bits beide eins sind – es ist also eine "zweifach-kontrollierte"-NOT-Operation.



4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und
Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!

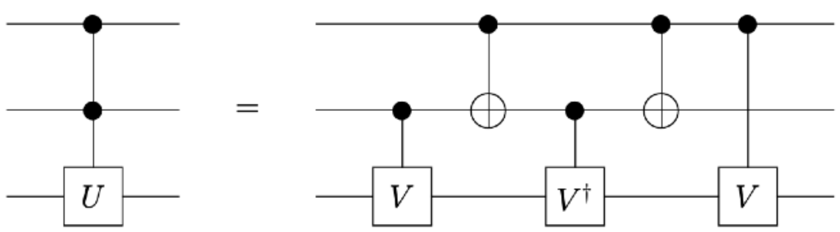
4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!
https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9503016

4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!
https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9503016

Lemma 6.1: *For any unitary 2×2 matrix U, a $\wedge_2(U)$ gate can be simulated by a network of the form*

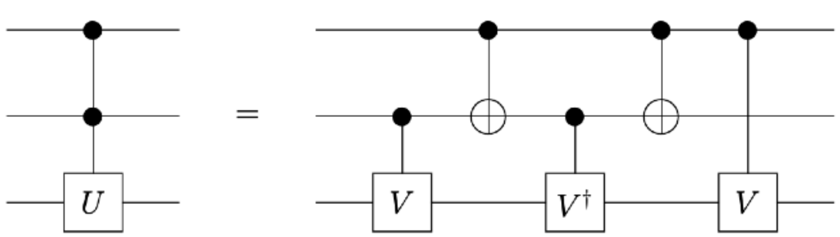


where V is unitary.

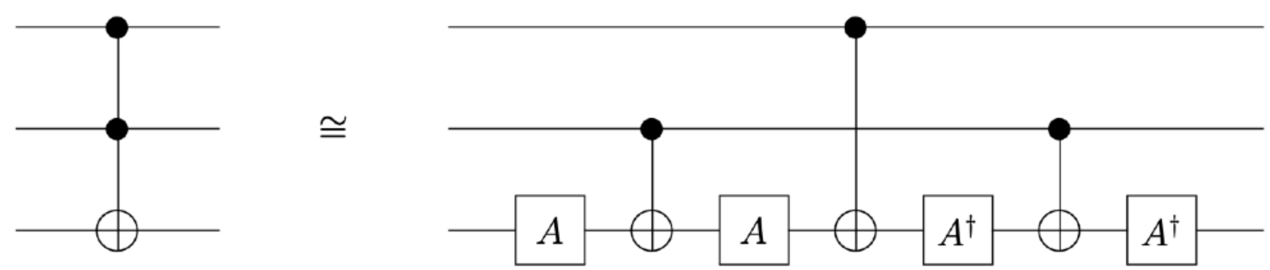
4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!
https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9503016

Lemma 6.1: *For any unitary 2×2 matrix U, a $\wedge_2(U)$ gate can be simulated by a network of the form*



where V is unitary.

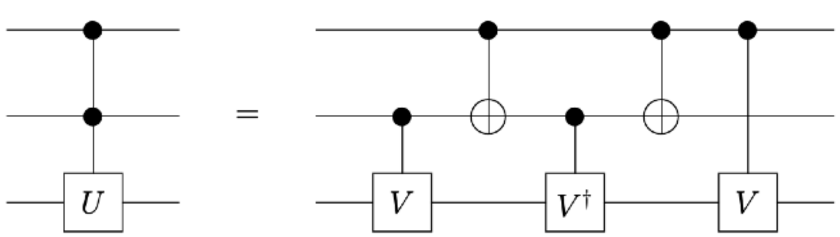


where $A = \mathrm{R_y}(\frac{\pi}{4})$. In the above, the "$\cong$" indicates that the networks are not identical, but differ at most in the phases of their amplitudes, which are all ± 1 (the phase of the $|101\rangle$ state is reversed in this case).

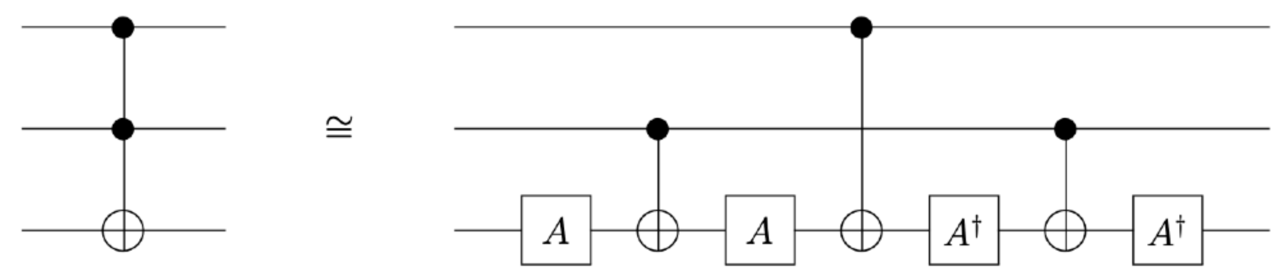
4.1.3 Die allgemeinsten Quantenoperationen

T kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!
https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9503016

Lemma 6.1: *For any unitary 2×2 matrix U, a $\wedge_2(U)$ gate can be simulated by a network of the form*



where V is unitary.



where $A = R_y(\frac{\pi}{4})$. In the above, the "$\cong$" indicates that the networks are not identical, but differ at most in the phases of their amplitudes, which are all ± 1 (the phase of the $|101\rangle$ state is reversed in this case).

Jede Quanten-Operation auf n QuBits kann auch als eine Reihe von Ein- und Zwei QuBit-Operationen geschrieben werden!

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \mathrm{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\mathrm{NOT}\,H = Z$.

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \mathrm{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\mathrm{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \text{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\text{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H|+\rangle = |0\rangle, \qquad H|-\rangle = |1\rangle.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \text{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\text{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{Z}|+\rangle = \hat{H}|-\rangle = |1\rangle = \hat{\textbf{NOT}}|0\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \mathrm{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\mathrm{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{Z}|+\rangle = \hat{H}|-\rangle = |1\rangle = \widehat{\mathbf{NOT}}|0\rangle \qquad \hat{H}\hat{Z}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\hat{Z}|-\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \widehat{\mathbf{NOT}}|1\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H\,|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H\,|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \text{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\text{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{Z}|+\rangle = \hat{H}|-\rangle = |1\rangle = \hat{\textbf{NOT}}|0\rangle \qquad \hat{H}\hat{Z}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\hat{Z}|-\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \hat{\textbf{NOT}}|1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{\textbf{NOT}}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{\textbf{NOT}}|+\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \hat{Z}|0\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.5: Z und NOT

Aus Gl. (2.20) wissen wir, dass das Hadamard-Gate H sich wie folgt auswirkt:

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,.$$

1. Prüfe, dass ein erneutes anwenden von H wieder zu den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ führt.

$$H\,|+\rangle = |0\rangle\,, \qquad H\,|-\rangle = |1\rangle\,.$$

2. Zeige, dass $H\,Z\,H = \mathrm{NOT}$, wobei Z in Gl. (2.12) definiert ist.
3. Zeige, dass $H\,\mathrm{NOT}\,H = Z$.

$$\hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle\right) = |1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\hat{Z}|+\rangle = \hat{H}|-\rangle = |1\rangle = \widehat{\mathbf{NOT}}|0\rangle \qquad \hat{H}\hat{Z}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\hat{Z}|-\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \widehat{\mathbf{NOT}}|1\rangle$$

$$\hat{H}\widehat{\mathbf{NOT}}\hat{H}|0\rangle = \hat{H}\widehat{\mathbf{NOT}}|+\rangle = \hat{H}|+\rangle = |0\rangle = \hat{Z}|0\rangle \qquad \hat{H}\widehat{\mathbf{NOT}}\hat{H}|1\rangle = \hat{H}\widehat{\mathbf{NOT}}|-\rangle = -\hat{H}|-\rangle = -|1\rangle = \hat{Z}|1\rangle$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Definition: $\hat{V}(\theta) = \widehat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\widehat{\mathbf{NOT}}$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Definition: $\hat{V}(\theta) = \hat{\textbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\hat{\textbf{NOT}}$

$$\hat{V}(\theta_2)\hat{V}(\theta_1) =$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Definition: $\hat{V}(\theta) = \hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\hat{\mathbf{NOT}}$

$$\hat{V}(\theta_2)\hat{V}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\,\hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta_1)$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Definition: $\hat{V}(\theta) = \hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\hat{\mathbf{NOT}}$

$$\hat{V}(\theta_2)\hat{V}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\,\hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{\mathbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\hat{U}(\theta_1)$$

4.1.4 Regeln für Schaltungen

Es gibt Tricks zur Vereinfachung von Quantenschaltungen
Einfachere Schaltungen sind meist auch schneller

Übungsaufgabe 4.6: Spiegelungen und Drehungen (optional)

Zeige, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Rotation ist. Zeige also, dass

$$V(\theta_2)V(\theta_1) = U(\theta),$$

für einen Winkel θ. Kannst du θ relativ zu θ_1 und θ_2 bestimmen?

Hint: Nutze Gl. (2.19) und die Gleichung $U(\varphi_2)U(\varphi_1) = U(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Definition: $\hat{V}(\theta) = \hat{\textbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)\,\hat{\textbf{NOT}}$

$$\hat{V}(\theta_2)\hat{V}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\,\hat{\textbf{NOT}}\,\hat{\textbf{NOT}}\,\hat{U}(\theta_1) = \hat{U}(-\theta_2)\hat{U}(\theta_1) = \hat{U}(\theta_1 - \theta_2)$$

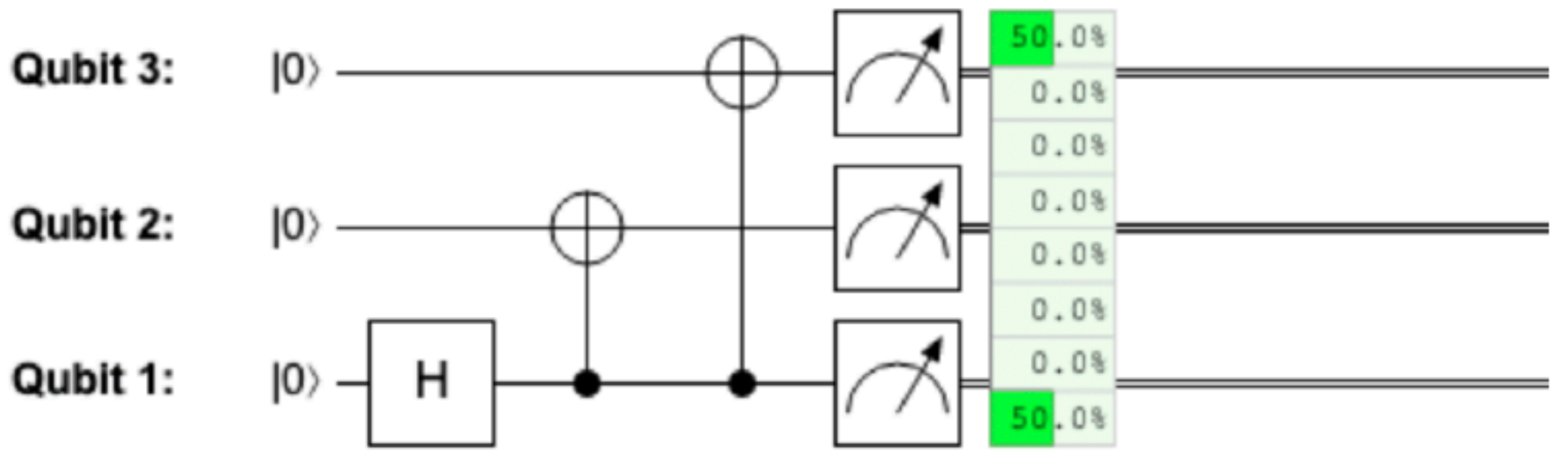
4.1.5 Alle Qubits messen

Wenn wir n QuBits messen dann erhalten wir mit der Wahrscheinlichkeit
$p_{a_1....a_n} = \psi^2_{a_1....a_n}$ **den Bit-String** $a_1 \ldots . a_n$

4.1.5 Alle Qubits messen

Wenn wir n QuBits messen dann erhalten wir mit der Wahrscheinlichkeit $p_{a_1 \ldots . a_n} = \psi^2_{a_1 \ldots . a_n}$ den Bit-String $a_1 \ldots . a_n$

Quirky

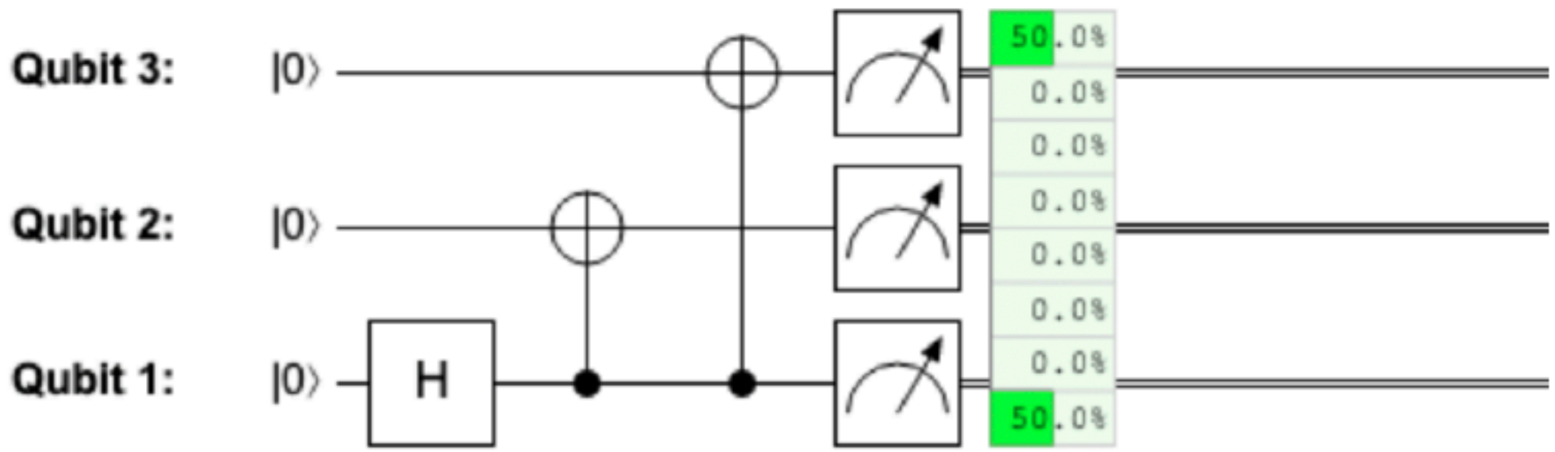


4.1.5 Alle Qubits messen

Wenn wir n QuBits messen dann erhalten wir mit der Wahrscheinlichkeit

$p_{a_1....a_n} = \psi^2_{a_1....a_n}$ **den Bit-String** $a_1 \dots . a_n$

Quirky



$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

Wenn wir das erste Bit messen,.

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle$$

Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle + |\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0.1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle +|\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit**

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{100}|100\rangle + \psi_{011}|011\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle + |\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle$$

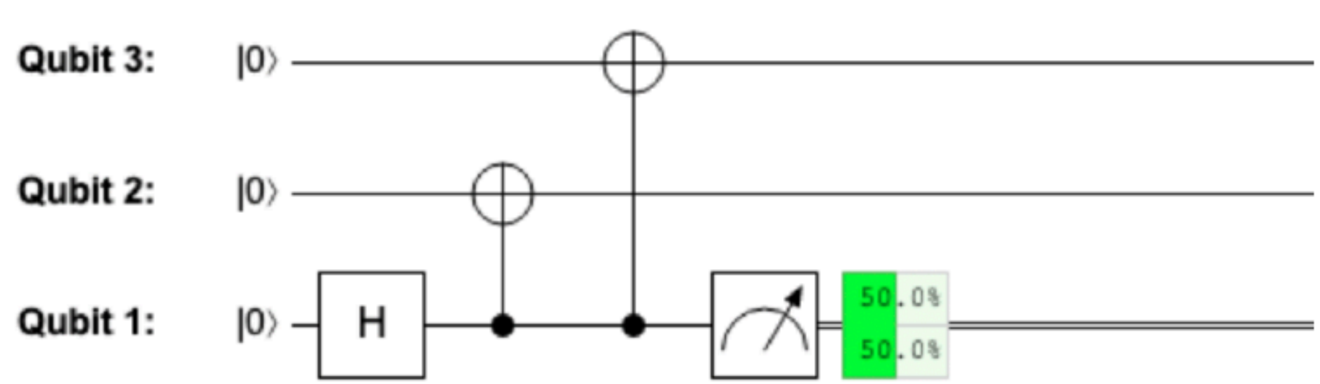
Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle +|\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Quirky:



4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle$$

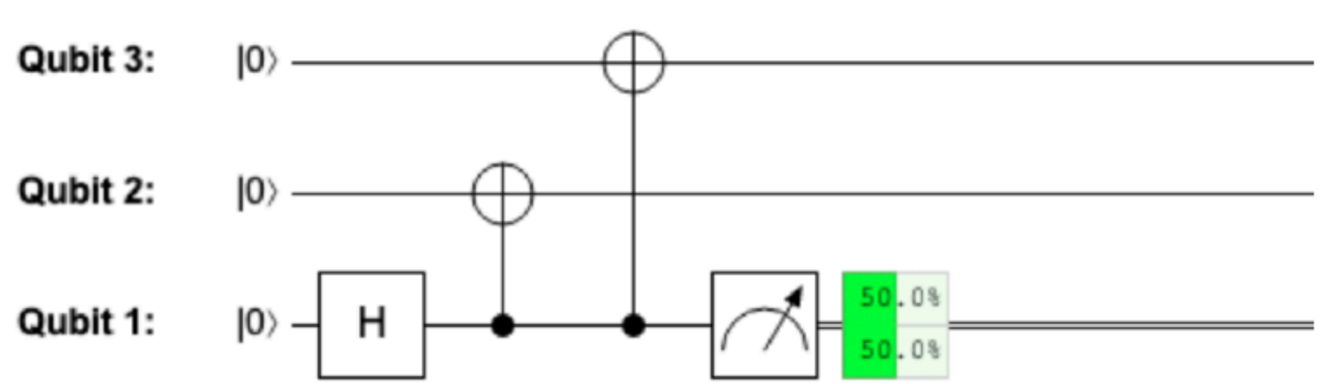
Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle +|\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Quirky:



CN̂OT$_{1\to3}$**CN̂OT**$_{1\to2}\hat{H}_1\,|000\rangle$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle$$

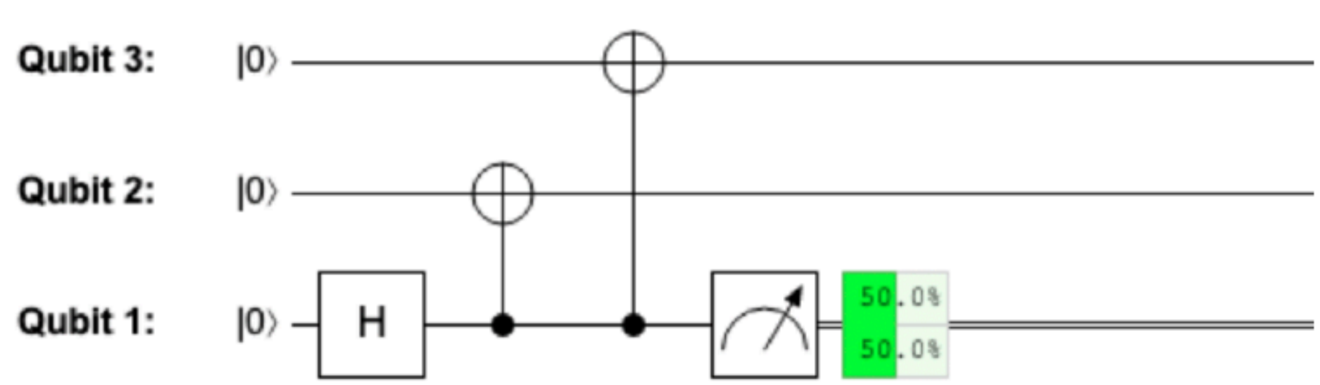
Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle + |\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Quirky:



$$\mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to3}\mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to2}\hat{H}_1\,|000\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to3}\mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to2}\,|000\rangle + \mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to3}\mathbf{C\hat{N}OT}_{1\to2}\,|100\rangle\right)$$

4.1.6 Einzelne Qubits messen

Annahme: Wir haben einen 3-QuBit Zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{000}\,|000\rangle + \psi_{001}\,|001\rangle + \psi_{010}\,|010\rangle + \psi_{100}\,|100\rangle + \psi_{011}\,|011\rangle + \psi_{101}\,|101\rangle + \psi_{110}\,|110\rangle + \psi_{111}\,|111\rangle$$

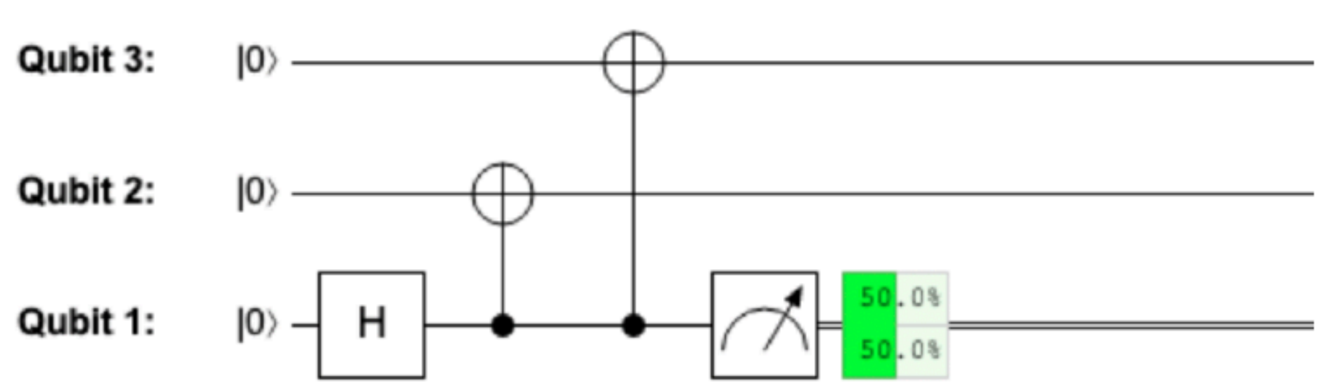
Wenn wir das erste Bit messen, dann finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$\psi_{a00}^2 + \psi_{a01}^2 + \psi_{a10}^2 + \psi_{a11}^2$$

den Wert $a \in \{0,1\}$**.**

Beispiel: Messen wir das erste QuBit von $\frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{8}}|010\rangle +|\sqrt{\frac{5}{8}}|111\rangle$ **so finden wir den Wert Null mit der Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Quirky:



$$\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to3}\,\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to2}\,\hat{H}_1\,|000\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to3}\,\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to2}\,|000\rangle + \text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to3}\,\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T}_{1\to2}\,|100\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right)$$