Vorlesung: Quantencomputing

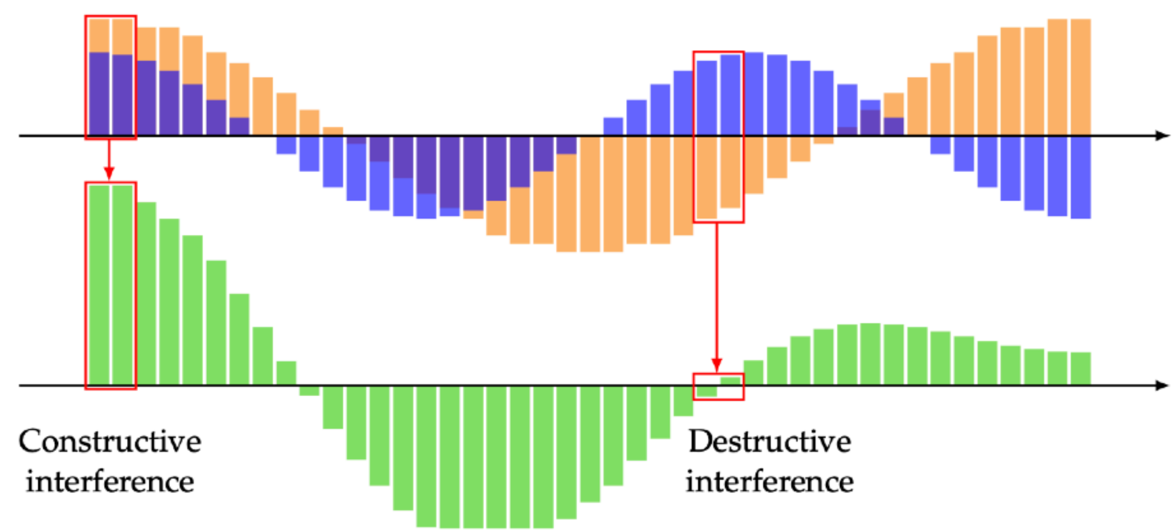
Mittwochsakademie

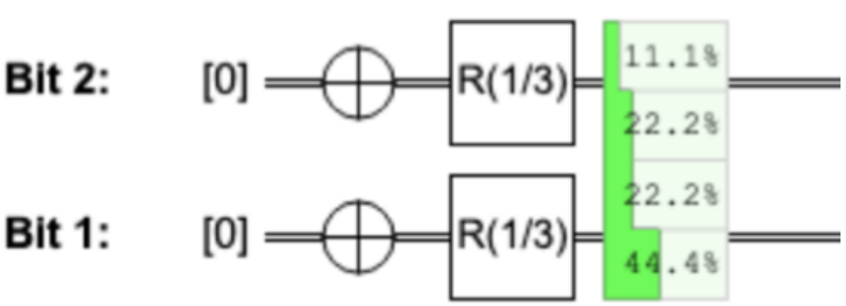
angelehnt an
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q4a Quantenkompositionen 1
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
28. 1.: Q5a Virtuose Algorithmen 1
4. 2.: Q5b Virtuose Algorithmen 2/
Verabschiedung von Prof. Claus Gruben





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Motivation

Quantenalgorithmus

文A 24 Sprachen

Artikel Diskussion Lesen Bearbeiten Quelltext bearbeiten Versionsgeschichte Werkzeuge

Ein **Quantenalgorithmus** ist ein Algorithmus, der auf einem Quantencomputer oder der Simulation eines Quantencomputers ausgeführt werden kann. Quantenalgorithmen verwenden grundlegende Eigenschaften der Quantenmechanik, z. B. Superposition (Überlagerung), Interferenz und Quantenverschränkung. Als Modell für den Quantencomputer dient dabei meistens eine Quantenschaltung, die aus Qubits, Quantengattern und quantenmechanischen Messungen besteht.

Von Quantenalgorithmen erwartet man gegenüber klassischen Algorithmen einen Vorteil bei der Lösung von ausgewählten Problemen. Für diese Probleme kann man nachweisen, dass ein Quantencomputer sie besser oder in weniger Arbeitsschritten lösen kann als ein klassischer Computer.

Ein bekanntes Beispiel ist der Shor-Algorithmus, der effizient ganze Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt.[1]

Motivation

Beispiel: Zufallszahlengenerator [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Der einfachste Quantenalgorithmus ist ein Zufallszahlengenerator, der echte Zufallszahlen erzeugt. Ein klassischer Rechner kann nur Pseudozufallszahlen berechnen.

Der folgende Quantenalgorithmus erzeugt eine Zufallszahl mit den Werten 0 oder 1. Er verwendet ein Quantenregister mit einem Qubit, ein Quantengatter und eine Messung.[2]

1. Initialisiere das Quantenregister $|x\rangle$ mit dem Basiszustand $|0\rangle$:

   $$|x\rangle = |0\rangle$$

2. Wende ein Hadamard-Gatter auf das Quantenregister $|x\rangle$ an. Das Hadamard-Gatter erzeugt eine Superposition aus $|0\rangle$ und $|1\rangle$:

   $$\begin{aligned} |x\rangle &\rightarrow H\,|x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \end{aligned}$$

3. Messe das Quantenregister. Das Ergebnis $|0\rangle$ tritt mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf. Das Ergebnis $|1\rangle$ tritt ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf.

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: $\hat{\text{NOT}}|0\rangle = |1\rangle \quad \hat{\text{NOT}}|1\rangle = |0\rangle$

Z-Operation: $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle \; \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$ **Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse**

Rotationen: $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = |\psi(\theta)\rangle$; $\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = |\psi(\theta + \frac{\pi}{2})\rangle$

Allgemeinste Spiegelung $\hat{V}(\theta)$ **hat die Form:** $\hat{V}(\theta) =$ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

Hadamard Transformation $\hat{H}$ $\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ **NOT** $\hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$|+\rangle := \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) =: |+\rangle$$

$$|-\rangle := \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) =: |-\rangle$$

Wdh.: Operationen auf 2 (Qu)Bits

SWAP:

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$
$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$
$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$
$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt:

$$\mathrm{SWAP}\,[a,b] = [b,a],$$

Mit Linearität erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{SWAP}\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right)\\ = p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11]\\ = p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11].\end{aligned}$$

$$\mathrm{SWAP}\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{10} \\ p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix}$$

CNOT:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

oder kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a,b] = [a, a \oplus b],$$

Wdh.: Produktzustände

Ein Zwei-QuBit Zustand lautet allgemein:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

mit $|\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2 + |\psi_{10}|^2 + |\psi_{11}|^2 = 1$ **und somit** $\psi_{ij} \in [-1,1]$

Als Basiszustände wählen wir

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

Damit lautet der allgemeine 2-QuBit Zustand $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\psi_{00}\\\psi_{01}\\\psi_{10}\\\psi_{11}\end{pmatrix}$

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle, \; |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle, \; |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle, \; |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und**
$|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden**
$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$
Derartige Zustände nennt man Produktzustände

Beachte: Nicht alle 2-QuBit Zustände sind Produktzustände

Wdh.: lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die
2-QuBit Operation $\hat{U}_1$ auf jeden Basisvektor $|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a, b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a, b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

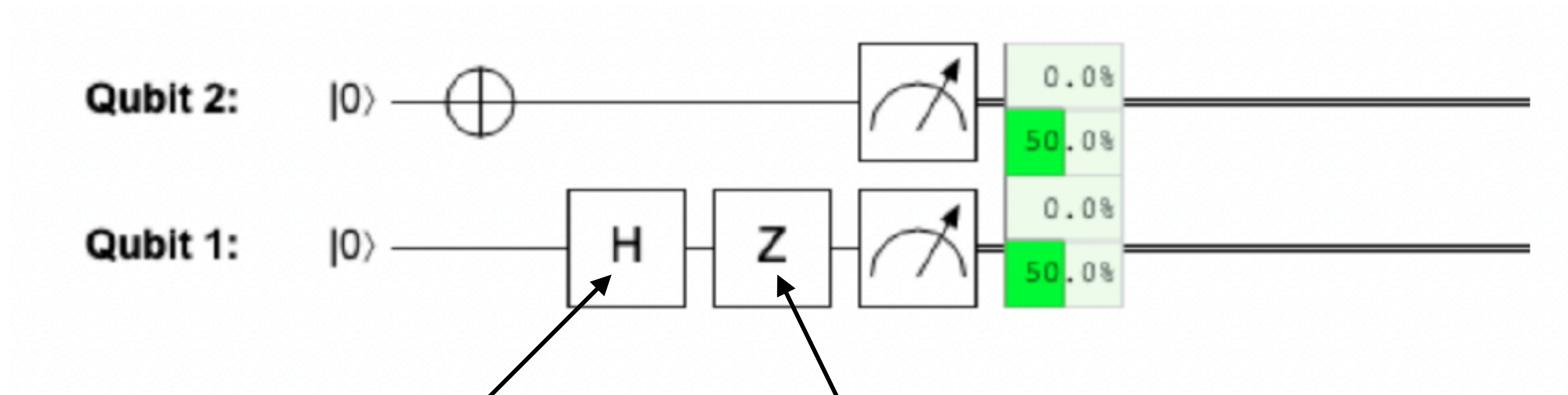
$$\hat{U}_1 |\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1|00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1|01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1|10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1|11\rangle$$

Analog definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_2$ als

$$\hat{U}_2 |a, b\rangle = |a\rangle \otimes \hat{U}|b\rangle$$

- Mögliche 1 QuBit Operationen: Rotationen $\hat{U}(\theta)$ und Spiegelungen $\hat{V}(\theta) = \hat{\text{NOT}}\,\hat{U}(\theta)$
- Obige Definitionen gelten auch für beliebige Produktzustände
  $\hat{U}_1(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \hat{U}|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ und $\hat{U}_2(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes \hat{U}|\beta\rangle$

Wdh.: Lokale Operationen



Hadamard $\hat{Z}$**-Spiegelung**

$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_2 |00\rangle = \hat{Z}_1 \hat{H}_1 |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Z}_1 \left(|01\rangle + |11\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle - |11\rangle \right)$$

50% **50%**

Wdh.: Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1 V_2 |a,b\rangle = U_1 (|a\rangle \otimes V|b\rangle) = U|a\rangle \otimes V|b\rangle = V_2 (U|a\rangle \otimes |b\rangle) = V_2 U_1 |a,b\rangle ,$$

Nutze Linearität bei beliebigem Zustand

In diesem Fall können wir die 2 Operationen parallel ausführen und wir führen eine neue Notation ein:

$$\left(\hat{U} \otimes \hat{V}\right)\left(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\right) = \left(\hat{U}|\alpha\rangle\right) \otimes \left(|\hat{V}\beta\rangle\right)$$

$\hat{U} \otimes \hat{V}$ nennt man das Tensorprodukt von 2 Quantenoperationen oder eine Paralleloperation.

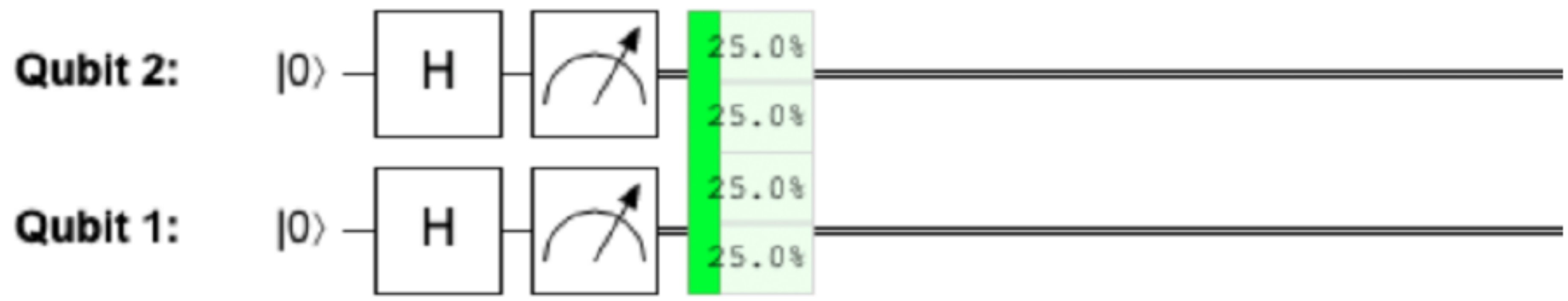
Wdh.: Parallele Operationen

Beispiel: $\hat{H} \otimes \hat{H}$

$$
\begin{aligned}
(H \otimes H)\left|00\right\rangle &= (H\left|0\right\rangle) \otimes (H\left|0\right\rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left|0\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|0\right\rangle \otimes \left|1\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle \otimes \left|1\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\left|00\right\rangle + \left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle).
\end{aligned}
$$

Uniforme Superposition

Test:



3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

1. Schreibe $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.
2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?
3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

1. Schreibe $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.
2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?
3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{||0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

1. Schreibe $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.
2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?
3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{||0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H}_2 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_1 |00\rangle$$

Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

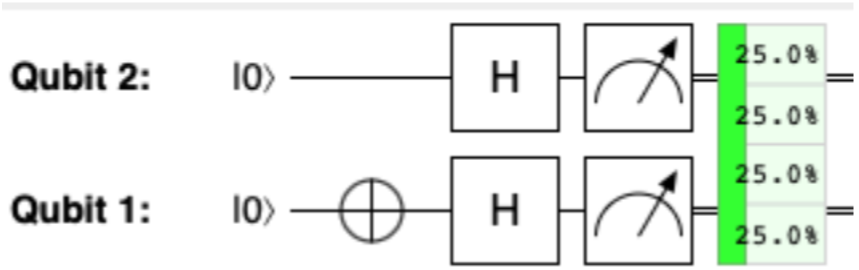
3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

1. Schreibe $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.
2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?
3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{||0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H}_2 \hat{H}_1 \hat{\mathbf{NOT}}_1 |00\rangle$$



Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

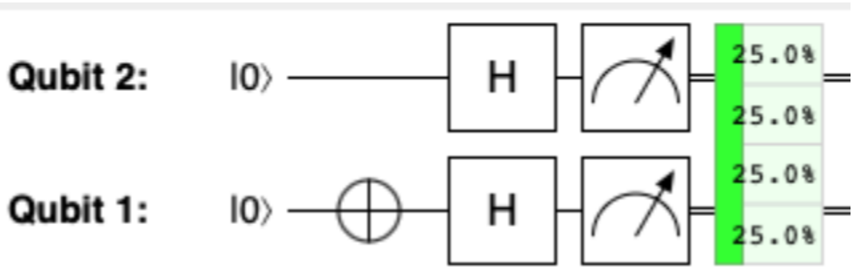
1. Schreibe $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.

2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?

3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{||0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H}_2 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_1 |00\rangle$$



Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

$$\hat{U}(\phi)_2 \hat{U}(\theta)_1 |00\rangle$$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta')$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta')$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta)$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

Im Allgemeinen gilt aber: $\hat{U}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{U}$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

Im Allgemeinen gilt aber: $\hat{U}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{U}$

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle =$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,0\rangle =$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,0\rangle = \hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}|0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = |-\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}|0\rangle = \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = |+\rangle$$

$$\hat{Z}\hat{H}|1\rangle =$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,0\rangle = \hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,1\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,0\rangle = \hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,1\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,1\rangle =$$

3.2.3 Parallele Operationen

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,0\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = |\,-\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,0\rangle = \hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

$$\hat{Z}\hat{H}\,|\,1\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) = |\,+\,\rangle$$

$$\hat{H}\hat{Z}\,|\,1\rangle = -\,\hat{H}\,|\,1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) = -\,|\,-\,\rangle$$

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

Im Allgemeinen gilt aber: $\hat{U}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{U}$

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

Im 2 QuBit-Fall wird das zu:

3.2.3 Parallele Operationen

Allgemeine Bemerkungen zum Tensorprodukt:

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV',$$

Und somit als Spezialfall:

$$U_1 = U \otimes I \qquad V_2 = I \otimes V,$$

Damit lautet: $\hat{U}_1 \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \hat{U}_1$

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I)$$

Reihenfolge von Operationen:

2 Drehungen: $\hat{U}(\theta)\hat{U}(\theta') = \hat{U}(\theta + \theta') = \hat{U}(\theta' + \theta) = \hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta)$

Drehungen vertauschen also

Im Allgemeinen gilt aber: $\hat{U}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{U}$

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

Im 2 QuBit-Fall wird das zu:

$$(U \otimes I)(V \otimes I) = UV \otimes I \neq VU \otimes I = (V \otimes I)(U \otimes I).$$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|00\rangle = |00\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|01\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|11\rangle = |10\rangle\,,$$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|00\rangle = |00\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|01\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|11\rangle = |10\rangle\,,$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = |a, a\oplus b\rangle\,.$$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \left|00\right\rangle &= \left|00\right\rangle , \\
\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \left|01\right\rangle &= \left|01\right\rangle , \\
\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \left|10\right\rangle &= \left|11\right\rangle , \\
\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \left|11\right\rangle &= \left|10\right\rangle ,
\end{aligned}$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2} \left|a, b\right\rangle = \left|a, a \oplus b\right\rangle .$$

Ebenso:

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \left|a, b\right\rangle = \left|a \oplus b, b\right\rangle$$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|00\rangle = |00\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|01\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|11\rangle = |10\rangle\,,$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = |a, a\oplus b\rangle\,.$$

Ebenso:

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1}\,|a,b\rangle = |a\oplus b, b\rangle$$

2 Kontrollierte NOT Operationen hintereinander macht nichts:

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|00\rangle = |00\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|01\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|11\rangle = |10\rangle\,,$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = |a, a\oplus b\rangle\,.$$

Ebenso:

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1}\,|a,b\rangle = |a\oplus b, b\rangle$$

2 Kontrollierte NOT Operationen hintereinander macht nichts:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a, a\oplus b\rangle = |a, a\oplus a\oplus b\rangle = |a,b\rangle$$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, benötigen wir Operationen bei denen die beiden QuBits interagieren

Kontrollierte NOT Operation:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |00\rangle = |00\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |01\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |10\rangle = |11\rangle\,,$$
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |11\rangle = |10\rangle\,,$$

Kompakt:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\ |a,b\rangle = |a, a \oplus b\rangle\,.$$

Ebenso:

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1}\ |a,b\rangle = |a \oplus b, b\rangle$$

2 Kontrollierte NOT Operationen hintereinander macht nichts:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a, a\oplus b\rangle = |a, a\oplus a \oplus b\rangle = |a,b\rangle$$

D.h.: $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}^{-1} = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}$

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Man kann für jede Ein QuBit Operation $\hat{U}$ verallgemeinerte kontrollierte Operationen $C\hat{U}_{1\to 2}$ einführen:

$$
\begin{aligned}
CU_{1\to 2}\,|00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle\,, \\
CU_{1\to 2}\,|01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle\,, \\
CU_{1\to 2}\,|10\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|0\rangle\,, \\
CU_{1\to 2}\,|11\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|1\rangle\,.
\end{aligned}
$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man <u>verschränkt</u>

3.2.5 Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man verschränkt

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$

$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man verschränkt

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Wir bestimmen wieder die Größe $\Delta(\psi) = \psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10}$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Bisher Produktzustände:

- **Tensorprodukt von 2 Ein-QuBit-Zuständen**
- **Anwendung von lokalen Operatoren auf** $|00\rangle$

Es gibt auch Zustände, die keine Produktzustände sind, diese nennt man verschränkt

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Wir bestimmen wieder die Größe $\Delta(\psi) = \psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10}$

Es gilt: $|\psi\rangle$ **ist ein Produktzustand** $\Leftrightarrow \Delta(\psi) = 0$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \;\Rightarrow\; \Delta(\Phi^+)$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \;\Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

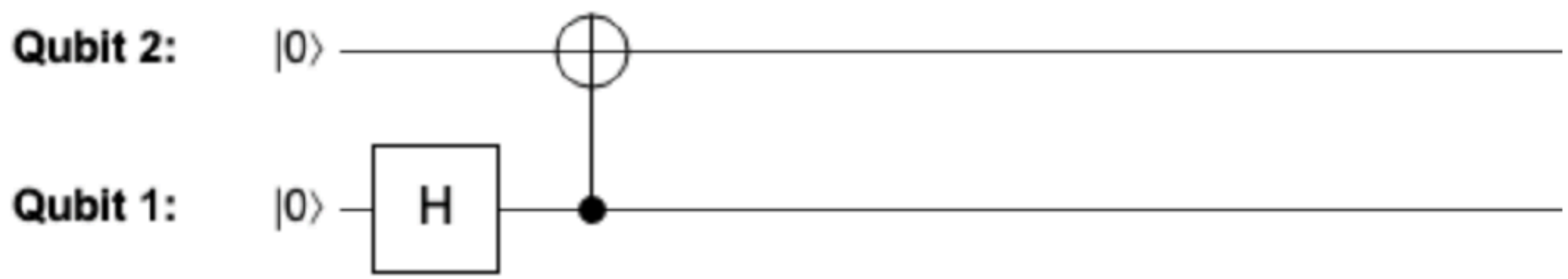
Erzeugung via Quirky:

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

Erzeugung via Quirky:

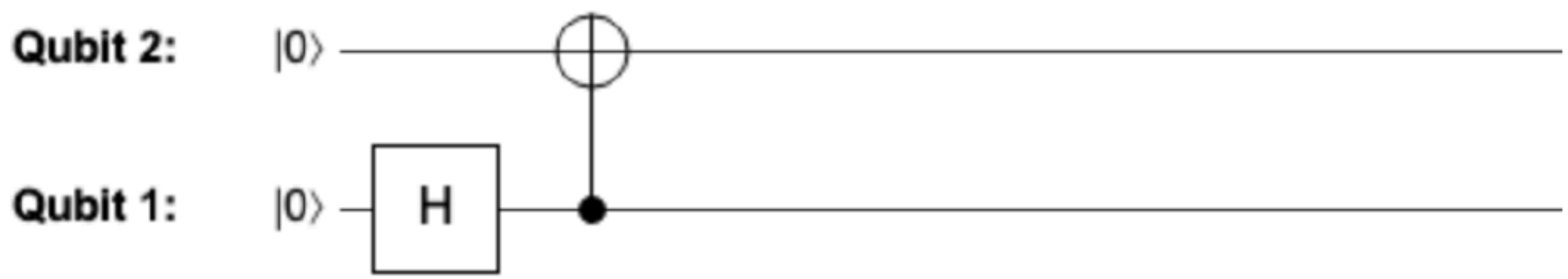


3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \;\Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \frac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

Erzeugung via Quirky:



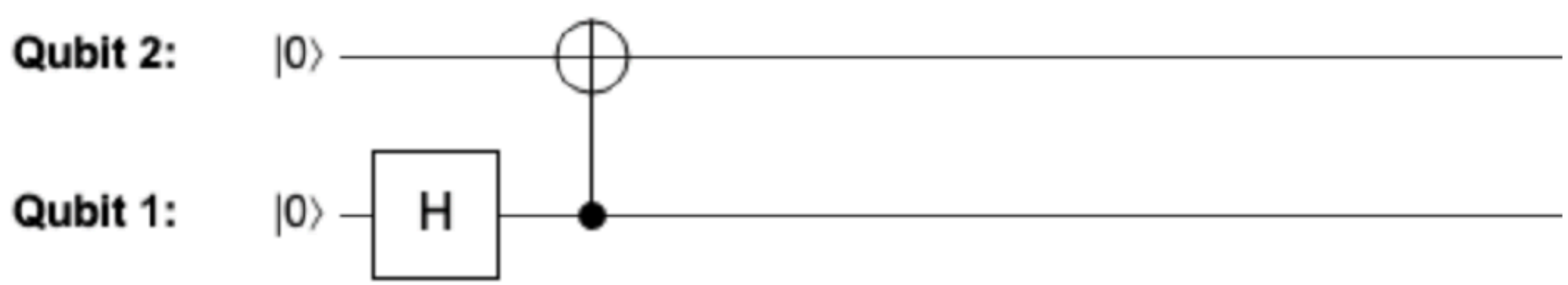
Beweis:

3.2.5 Verschränkte Zustände

Beispiel: $|\Phi^+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \;\Rightarrow \Delta(\Phi^+) = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Dieser Zustand wir auch der maximal verschränkte Zustand genannt

Erzeugung via Quirky:



Beweis:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)\,|00\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

$|\Phi^+\rangle$ **gehört zu einer Familie von 4 Zuständen die Bell-Zustände genannt werden**

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

$|\Phi^+\rangle$ gehört zu einer Familie von 4 Zuständen die Bell-Zustände genannt werden

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Wir definieren folgende Operation: $\hat{U}_{\text{Bell}} := C\hat{\text{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$ **und finden**

3.2.5 Verschränkte Zustände

$|\Phi^+\rangle$ gehört zu einer Familie von 4 Zuständen die Bell-Zustände genannt werden

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Wir definieren folgende Operation: $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{N}}\textbf{OT}_{1\to 2}(\hat{H}\otimes\hat{1})$ und finden

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= U_{\mathrm{Bell}}\,|00\rangle\,, \qquad & |\Phi^-\rangle &= U_{\mathrm{Bell}}\,|10\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= U_{\mathrm{Bell}}\,|01\rangle\,, \qquad & |\Psi^-\rangle &= U_{\mathrm{Bell}}\,|11\rangle\,.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,(H\otimes I)\,|00\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle
$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.12: Bell Zustände vorbereiten

Zeichne, wie du die anderen drei Bell Zustände in QUIRKY konstruieren würdest: $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, and $|\Psi^-\rangle$.

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

$$|\Psi^-\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\,|11\rangle$$

$$\hat{U}_{\mathbf{Bell}} := C\hat{\mathbf{N}}\mathbf{OT}_{1\to 2}(\hat{H}\otimes \hat{1})$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

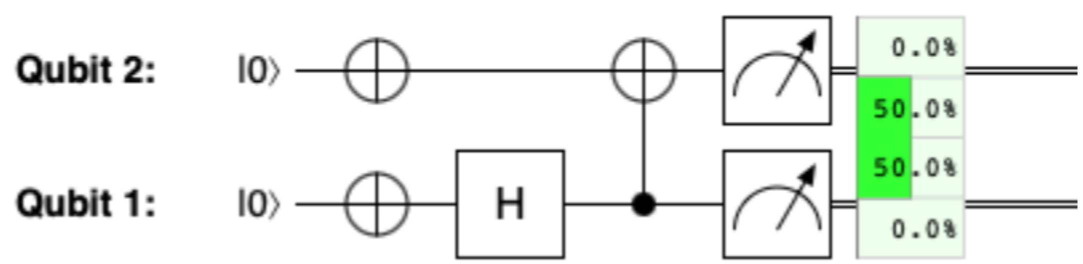
Übungsaufgabe 3.12: Bell Zustände vorbereiten

Zeichne, wie du die anderen drei Bell Zustände in QUIRKY konstruieren würdest: $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, and $|\Psi^-\rangle$.

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle\,.$$

$$|\Psi^-\rangle = U_{\mathrm{Bell}}\,|11\rangle$$

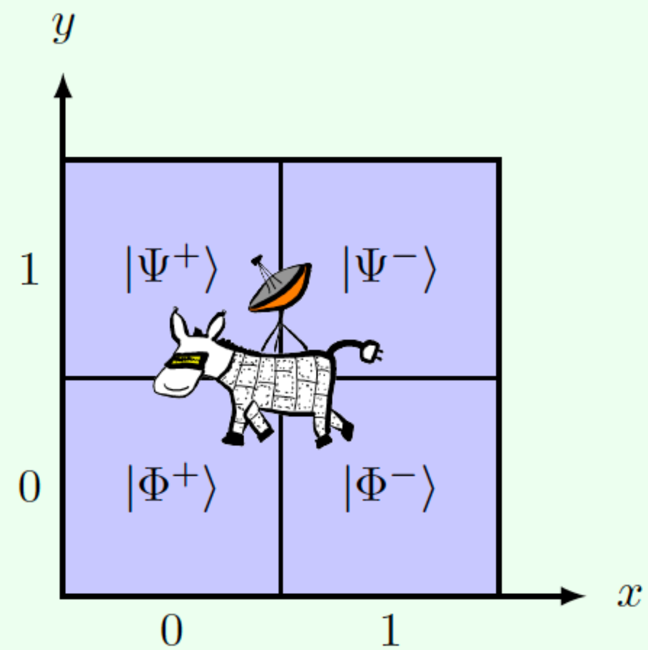
$$\hat{U}_{\mathbf{Bell}} := C\hat{\mathbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H}\otimes\hat{1})$$



3.2.5 Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



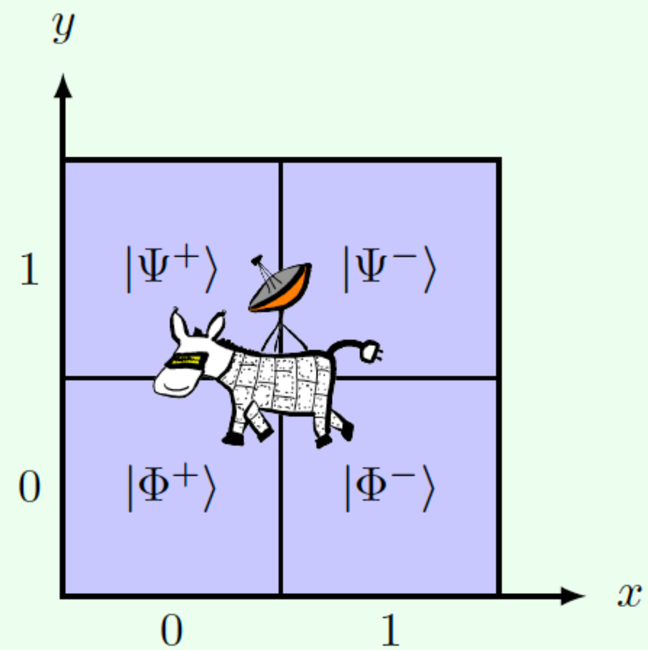
Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

D.H.: Invertiere $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

D.H.: Invertiere $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\widehat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$

$$\hat{H}|0\rangle = |+\rangle\,,\ \hat{H}|1\rangle = |-\rangle$$

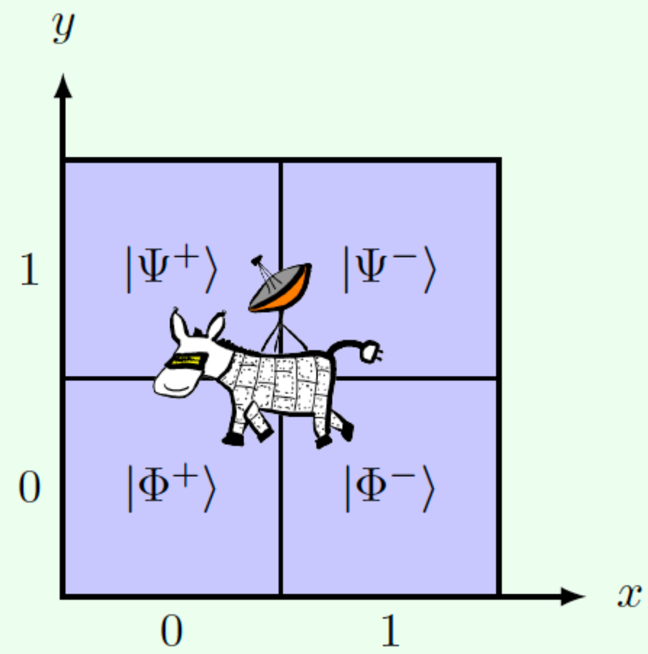
$$\hat{H}^2|0\rangle = \hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|0\rangle) = |0\rangle$$

$$\hat{H}^2|1\rangle = \hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|1\rangle) = |0\rangle$$

3.2.5 Verschränkte Zustände

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

D.H.: Invertiere $\hat{U}_{\textbf{Bell}} := C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}(\hat{H} \otimes \hat{1})$

$$\hat{U}^{-1}_{\textbf{Bell}} := (\hat{H} \otimes \hat{1})C\hat{\textbf{NOT}}_{1\to 2}$$

$$\hat{H}|0\rangle = |+\rangle, \ \hat{H}|1\rangle = |-\rangle$$

$$\hat{H}^2|0\rangle = \hat{H}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle + \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|0\rangle) = |0\rangle$$

$$\hat{H}^2|1\rangle = \hat{H}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \frac{1}{2}(2|1\rangle) = |0\rangle$$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Es gibt ausgeprägte Ähnlichkeiten zwischen korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und verschränkten Zuständen

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Es gibt ausgeprägte Ähnlichkeiten zwischen korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und verschränkten Zuständen

Starte mit allgemeinem Ein QuBit zustand $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$

Messung: mit Wahrscheinlichkeit ψ_i^2 **ergibt sich** $|i\rangle$

Dies kann durch die Wahrscheinlichleitsverteilung $\psi_0^2[0] + \psi_1^2[1]$ **modelliert werden**

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Es gibt ausgeprägte Ähnlichkeiten zwischen korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und verschränkten Zuständen

Starte mit allgemeinem Ein QuBit zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

Messung: mit Wahrscheinlichkeit ψ_i^2 **ergibt sich** $|i\rangle$

Dies kann durch die Wahrscheinlichleitsverteilung $\psi_0^2[0] + \psi_1^2[1]$ **modelliert werden**

Starte mit allgemeinem Zwei QuBit zustand

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

Messung: mit Wahrscheinlichkeit ψ_{ij}^2 **ergibt sich** $|ij\rangle$

Dies kann durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$\psi_{00}^2[00] + \psi_{01}^2[01] + \psi_{10}^2[10] + \psi_{11}^2[11]$ **modelliert werden**

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Erzeugen wir den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ und messen ihn, dann erhalten wir ein perfekt korrelierten Paar von Zufallsbits

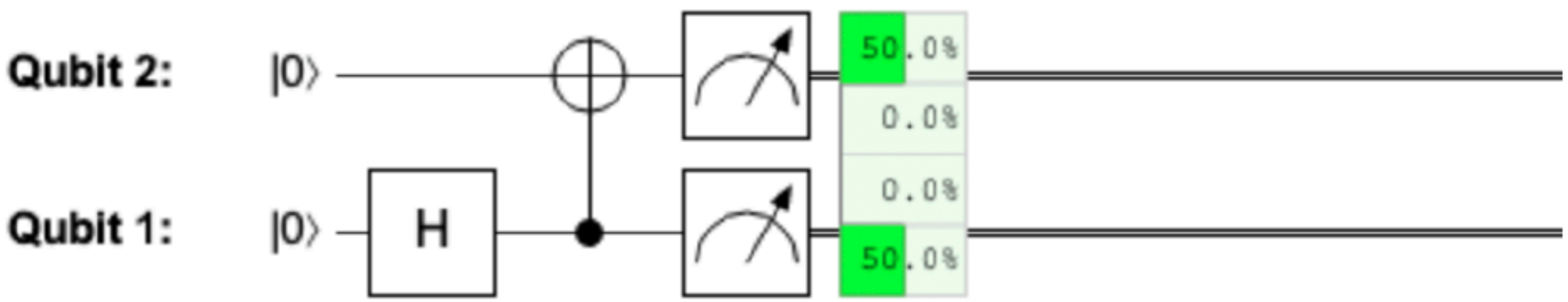
$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Erzeugen wir den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ und messen ihn, dann erhalten wir ein perfekt korrelierten Paar von Zufallsbits

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Test:

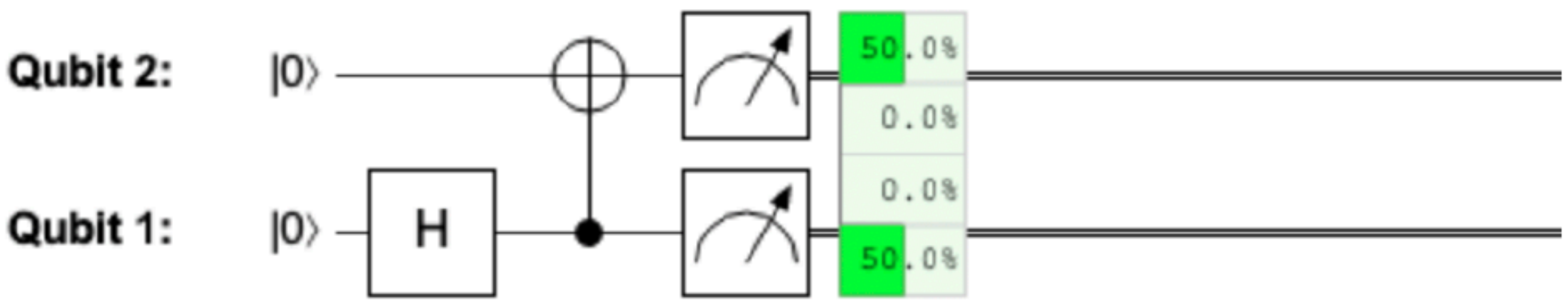


3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Erzeugen wir den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ und messen ihn, dann erhalten wir ein perfekt korrelierten Paar von Zufallsbits

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Test:



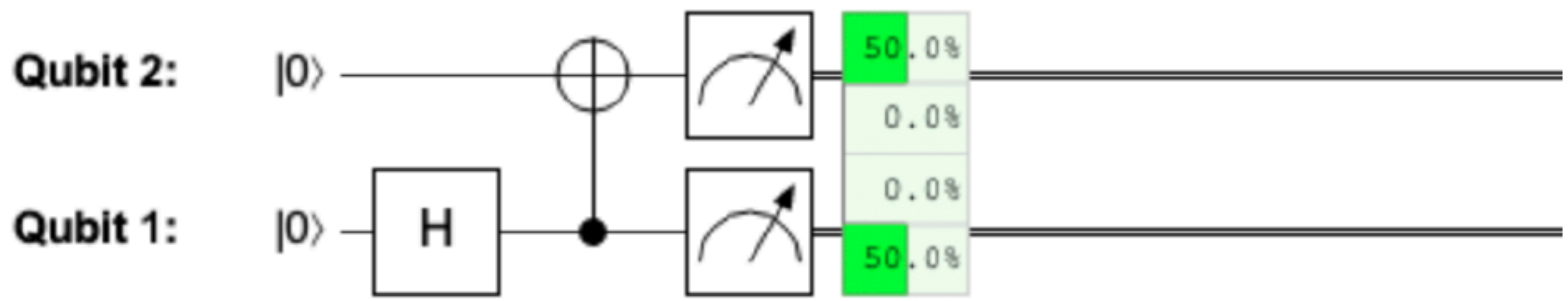
Dasselbe gilt für $|\Phi^-\rangle$**:** $\dfrac{1}{2}[00] + \dfrac{1}{2}[11]$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Erzeugen wir den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ und messen ihn, dann erhalten wir ein perfekt korrelierten Paar von Zufallsbits

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Test:



Dasselbe gilt für $|\Phi^-\rangle$**:** $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

Für die Zustände $|\Psi^\pm\rangle$ **erhalten wir hingegen** $\frac{1}{2}[01] + \frac{1}{2}[10]$ **welches anti-korrelierte Bits beschreibt.**

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ **mit** $\Delta(|\psi\rangle)$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ mit $\Delta(|\psi\rangle)$

$$
\begin{aligned}
\Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\
&= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})\,(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\
&= \Delta(|\psi\rangle)\,\big(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\big) = 0.
\end{aligned}
$$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ mit $\Delta(|\psi\rangle)$

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\ &= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})\,(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\ &= \Delta(|\psi\rangle)\,\big(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\big) = 0.\end{aligned}$$

d.h. ist $\Delta(|\psi\rangle) = 0$, dann folgt daraus $\Delta(p) = 0$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ mit $\Delta(|\psi\rangle)$

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\ &= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})\,(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\ &= \Delta(|\psi\rangle)\,\big(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\big) = 0.\end{aligned}$$

d.h. ist $\Delta(|\psi\rangle) = 0$, dann folgt daraus $\Delta(p) = 0$

Zu jeder gegeben Wahrscheinlichkeitsverteilung p können wir einfach einen Quantenzustand $|\psi\rangle$ finden, dass Messergebnis gemäß p verteilt ist.

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_{00}}\,|00\rangle + \sqrt{p_{01}}\,|01\rangle + \sqrt{p_{10}}\,|10\rangle + \sqrt{p_{11}}\,|11\rangle$$

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Vergleiche das Mass $\Delta(p)$ mit $\Delta(|\psi\rangle)$

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\ &= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\ &= \Delta(|\psi\rangle)\left(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\right) = 0.\end{aligned}$$

d.h. ist $\Delta(|\psi\rangle) = 0$, dann folgt daraus $\Delta(p) = 0$

Zu jeder gegeben Wahrscheinlichkeitsverteilung p können wir einfach einen Quantenzustand $|\psi\rangle$ finden, dass Messergebnis gemäß p verteilt ist.

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_{00}}\,|00\rangle + \sqrt{p_{01}}\,|01\rangle + \sqrt{p_{10}}\,|10\rangle + \sqrt{p_{11}}\,|11\rangle$$

d.h. Quantenzustände können alles was Wahrscheinlichkeitsverteilungen können

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow \ |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |01\rangle \rightarrow \ |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |10\rangle \rightarrow \ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\ |11\rangle \rightarrow \ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,. \end{cases}$$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \to & |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |01\rangle \to & |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |10\rangle \to & |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\ |11\rangle \to & |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow \ |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\ |01\rangle \rightarrow \ |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\ |10\rangle \rightarrow \ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle, \\ |11\rangle \rightarrow \ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\left\{\begin{array}{l}
|00\rangle \rightarrow \quad |\Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\
|01\rangle \rightarrow \quad |\Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle, \\
|10\rangle \rightarrow \quad |\Psi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle, \\
|11\rangle \rightarrow \quad |\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.
\end{array}\right.$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

Kann Alice trotzdem die gesamte 2-QuBit Information übertragen?

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow & |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |01\rangle \rightarrow & |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |10\rangle \rightarrow & |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\ |11\rangle \rightarrow & |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

Kann Alice trotzdem die gesamte 2-QuBit Information übertragen? Klassisch: NEIN

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \to \ |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |01\rangle \to \ |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |10\rangle \to \ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\ |11\rangle \to \ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

Kann Alice trotzdem die gesamte 2-QuBit Information übertragen? Klassisch: NEIN
Einfaches Senden des ersten oder 2 QuBits reicht nicht aus

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Quantenzustände können aber noch viel mehr!

Aufgabe 3.13: Esel an Position $\{a, b\}$ **mit** $a, b \in \{0{,}1\}$

Dies wurde codiert mit den 4 Bell-Zuständen

$$\begin{cases} |00\rangle \to & |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |01\rangle \to & |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\ |10\rangle \to & |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\ |11\rangle \to & |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,. \end{cases}$$

Alice will die Info über den Ort des Esels an Bob weiterleiten
Geld auf Quantum-Handy ist alle, d.h. Alice kann nur noch 1 Qubit übertragen

Kann Alice trotzdem die gesamte 2-QuBit Information übertragen? Klassisch: NEIN
Einfaches Senden des ersten oder 2 QuBits reicht nicht aus
Bob misst dies und danach ist der ursprüngliche Zustand verschwunden

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$**,**

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$
\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,, \\
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,, \\
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall $\{0,0\}$ an**

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$, d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle,$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle,$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle,$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0,0\}$ **an**

1. QuBit: $\hat{Z}_1$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0,0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0,1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{\text{NOT}}_1$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{\text{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}0\}$ **an**

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
1. QuBit: $\hat{1}_1$ — **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$
1. QuBit: $\hat{Z}_1$ — **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$
1. QuBit: $\widehat{\mathrm{NOT}}_1$ — **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}0\}$ **an**

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$
1. QuBit: $\hat{Z}_1\,\widehat{\mathrm{NOT}}_1$

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{1}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\,,$$

1. QuBit: $\hat{Z}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,,$$

1. QuBit: $\widehat{\mathrm{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}0\}$ **an**

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\,.$$

1. QuBit: $\hat{Z}_1\,\widehat{\mathrm{NOT}}_1$ **Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}1\}$ **an**

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

Superdense Coding

Start: Bob und Alice teilen sich schon vorher den Zustand $|\Phi^+\rangle$,
d.h. Alice besitzt das erste Bit und Bob das zweite Bit dieses Zustandes

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

$\lvert\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 11\rangle\,,$	**1. QuBit:** $\hat{1}_1$	**Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}0\}$ **an**
$\lvert\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 11\rangle\,,$	**1. QuBit:** $\hat{Z}_1$	**Dies wendet Alice im Fall** $\{0{,}1\}$ **an**
$\lvert\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 10\rangle\,,$	**1. QuBit:** $\widehat{\mathrm{NOT}}_1$	**Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}0\}$ **an**
$\lvert\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 10\rangle\,.$	**1. QuBit:** $\hat{Z}_1\,\widehat{\mathrm{NOT}}_1$	**Dies wendet Alice im Fall** $\{1{,}1\}$ **an**

Dann sendet Alice Ihr QBuit an Bob und der hat den gesamten Zustand
und kann des gesamten Zustand extrahieren (Ü 3.13)