Vorlesung: Das theoretische Minimum

Mittwochsakademie

angelehnt an

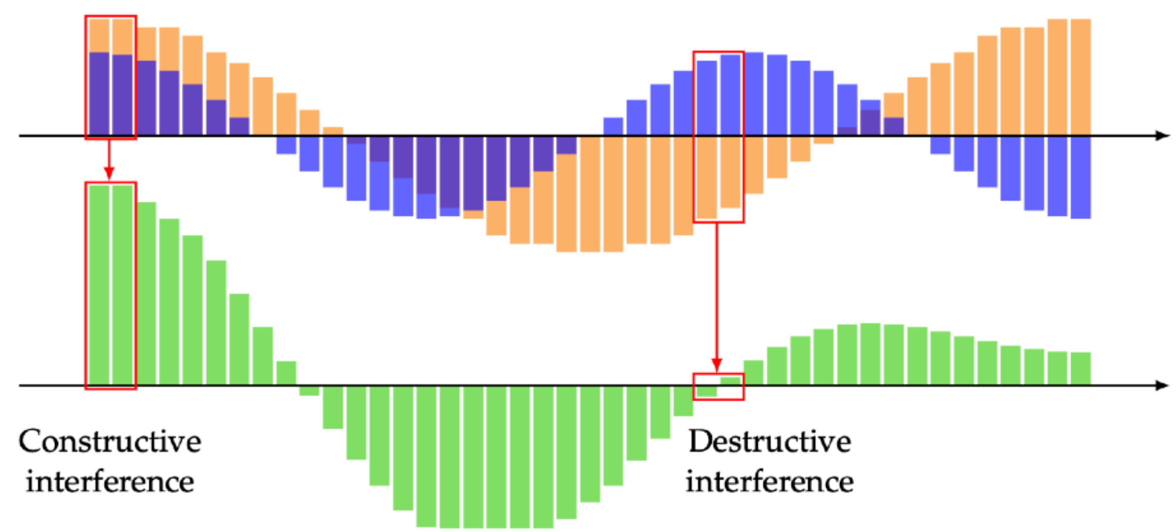
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter

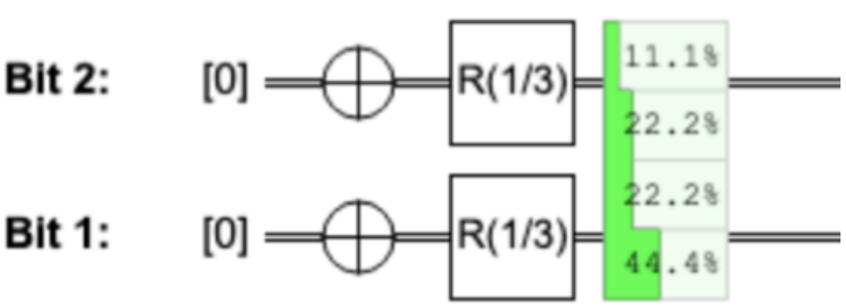
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q4a Quantenkompositionen 1
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
28. 1.: Q5a Virtuose Algorithmen 1
4. 2.: Q5b Virtuose Algorithmen 2





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Wdh.: Probabilistisches vs. Quantum Bit

Probabilistisches Bit:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ gilt: $p_{0,1} \geq 0$ und, $p_0 + p_1 = 1$, i.e. $p_{0,1} \in [0,1]$

Quanten Bit: ein allgemeines QuBit $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) der beiden Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ gilt: $\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ und somit $\psi_{0,1} \in [-1,1]$

Die QuBitzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ können auch durch Vektoren dargestellt werden

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad |\psi\rangle = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Probabilistisches vs. Quantum Bit

QuBits ähneln probabilistischen Bits - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichkeiten** $p_{0,1}$ **werden durch** ***Amplituden*** $\psi_{0,1}$ **ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**) Die Basiszustände** $[0], [1]$ **durch** $|0\rangle, |1\rangle$
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die möglichen Zustände eines QuBits liegen auf einem Kreis, während die möglichen Zustände eines probabilistischen Bits auf einer Geraden liegen

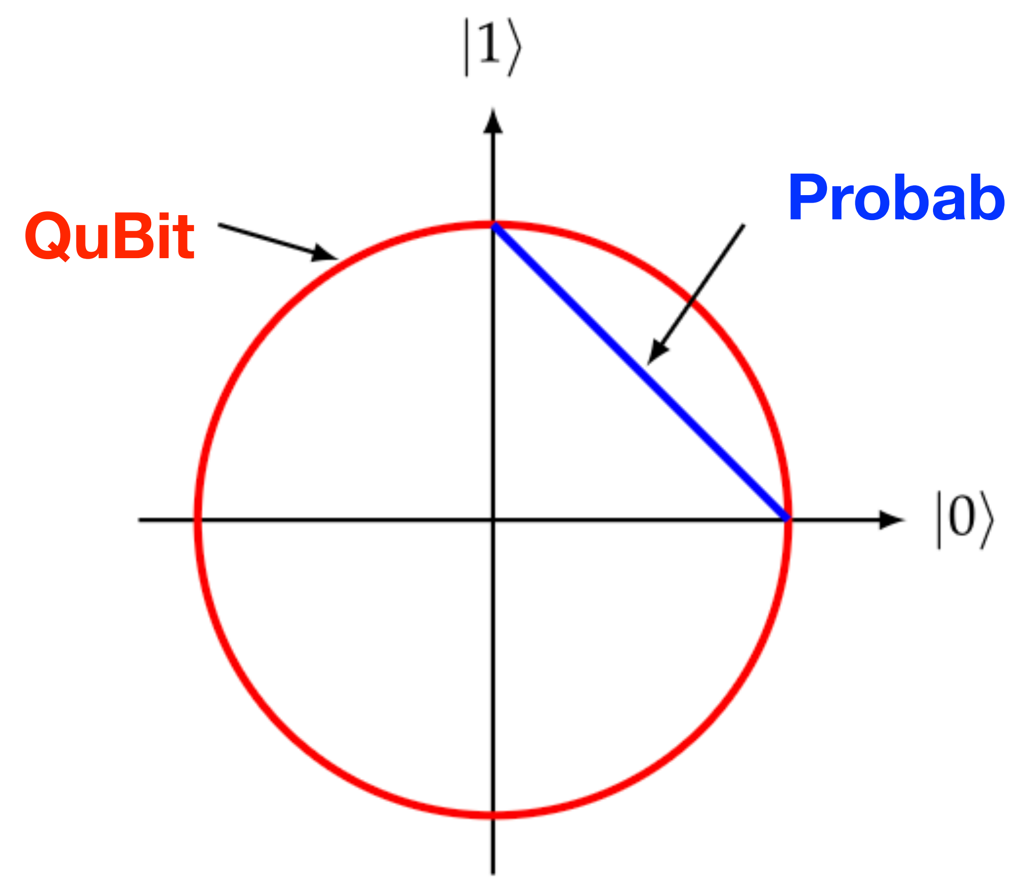
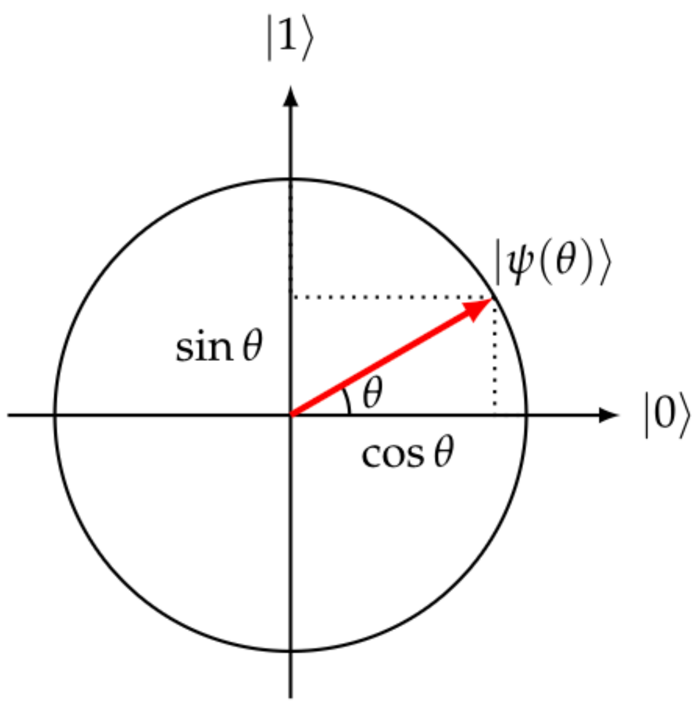


Abbildung 2.2: Der Zustandsraum eines probabilistischen Bits (blau) sowie eines Qubits (rot).

Wdh.: Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**



Damit können wir die Amplituden wie folgt parametrisieren

$$\psi_0 = \cos\theta\,, \psi_1 = \sin\theta$$

Ein allgemeiner Zustand lautet dann

$$|\,\psi(\theta)\rangle = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

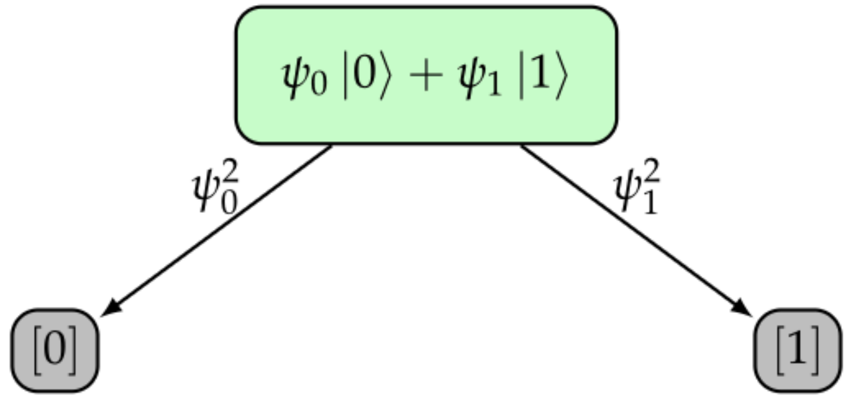
Insbesondere gilt: $|\,\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $|\,\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wdh.: Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

<u>Born-Regel:</u>

Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.



Nach der Messung ist der ursprüngliche Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$ verschwunden und es gibt nur noch $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

Weitere Messungen an diesem System liefern keine zusätzlichen Informationen mehr.

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

<u>**Linearität:**</u> **Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quantenmechanik: jede lineare Operation ist eine erlaubt QuBit Operation, solange sie den QuBit-Raum (Kreis) auf sich selbst abbildet (wieder auf Kreis).

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

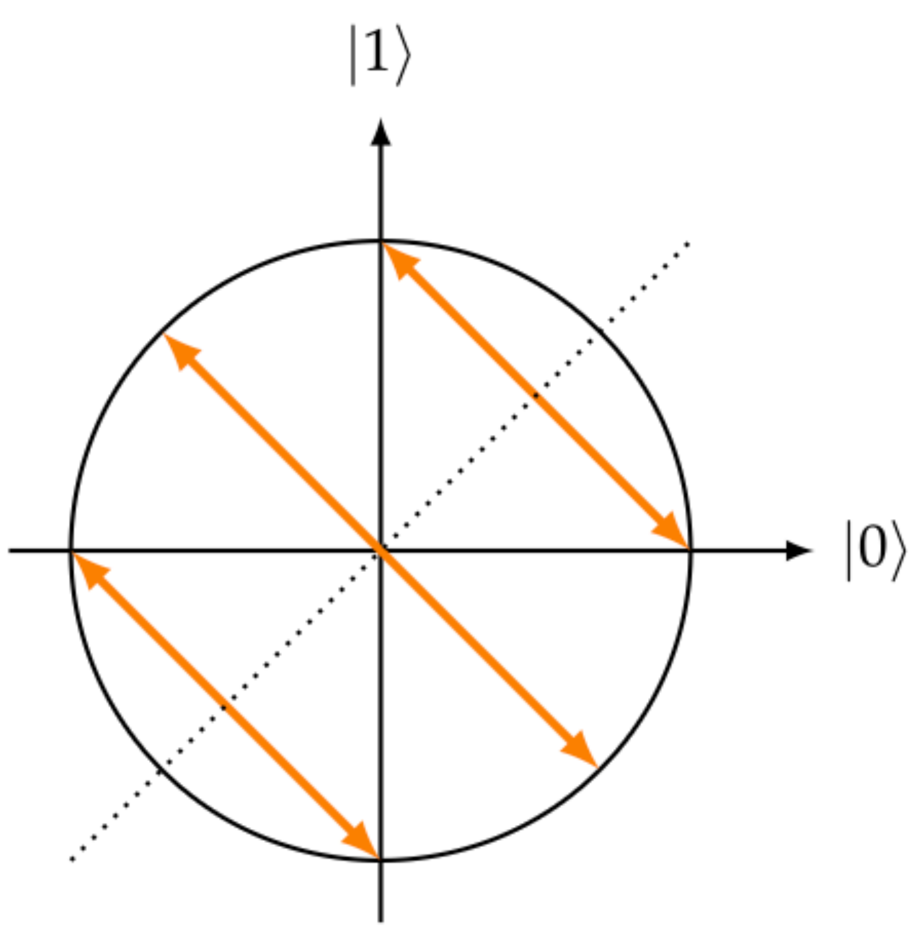
$$\hat{\text{NOT}}\,|0\rangle = |1\rangle \quad \hat{\text{NOT}}\,|1\rangle = |0\rangle$$

Damit folgt:

$$\hat{\text{NOT}}\left(\psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle\right) = \psi_0\,\hat{\text{NOT}}\,|0\rangle + \psi_1\,\hat{\text{NOT}}\,|1\rangle = \psi_0|1\rangle + \psi_1|0\rangle$$

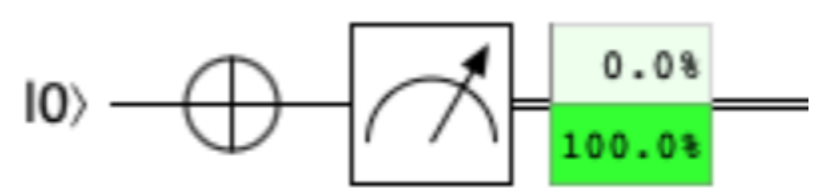
oder

$$\hat{\text{NOT}}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix}$$



NOT-Operation:
Spiegelung an der Winkelhalbierenden

Quirky:



Wdh.: Operationen auf einem Qubit

Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse: Z-Operation

$$\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle \qquad \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$$

Linearität:

$$\hat{Z}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}$$

$$|+\rangle := \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |-\rangle := \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{Z}|+\rangle = |-\rangle$$

$$\hat{Z}|-\rangle = |+\rangle$$

Wdh.: Operationen auf einem Qubit

$$\hat{\mathrm{MAD}}\,|0\rangle = |0\rangle$$

$$\hat{\mathrm{MAD}}\,|1\rangle = 1/\sqrt{2}\,|0\rangle + |1\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{\mathrm{MAD}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Lineare Operation, aber Ergebnis liegt nicht auf dem Einheitskreis!

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} \gg 1$$

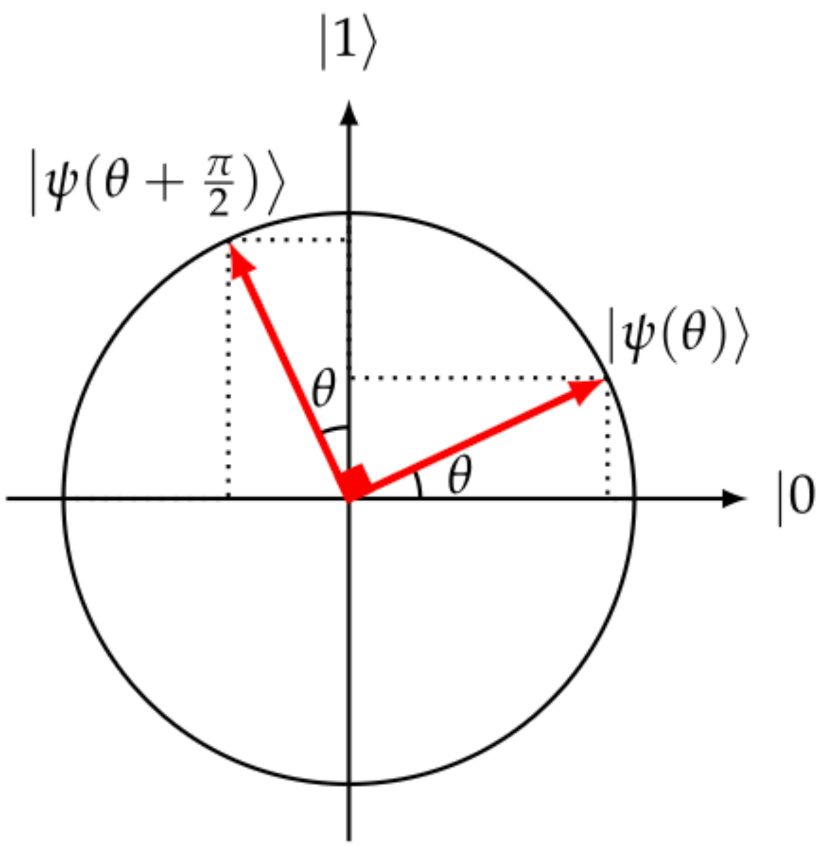
$\hat{\mathrm{MAD}}$ **ist keine erlaubte Operation!**

Wdh.: Rotationen

<u>**Drehung $\hat{U}(\theta)$**</u> **um den Winkel θ um den Ursprung**

$$\hat{U}(\theta)\,|\,0\rangle = |\,\psi(\theta)\rangle$$

$$\hat{U}(\theta)\,|\,1\rangle = |\,\psi(\theta + \frac{\pi}{2})\rangle$$



In Vektornotation:

$$\hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \hat{U}(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Darstellung als 2x2 Matrix

$$\hat{U}(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Es gilt: $\hat{U}(\theta)\,|\,\psi(\alpha)\rangle = |\,\psi(\alpha + \theta)\rangle$

$$\hat{U}(\theta)\hat{U}(\varphi) = \hat{U}(\theta + \varphi)$$

Wdh.: Zusammengesetzte und inverse Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die <u>zusammengesetzte Operation</u> $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine <u>inverse Operation</u> $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

Beispiele für Inverse:

- **NOT**$^{-1}$ = **NOT**
- $\hat{R}(\theta)^{-1} = \hat{R}(-\theta)$
- $\hat{Z}^{-1} = \hat{Z}$
- $(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$, **da** $NM(NM)^{-1} = NMM^{-1}N^{-1}$

Wdh.: Invertiertere Operationen

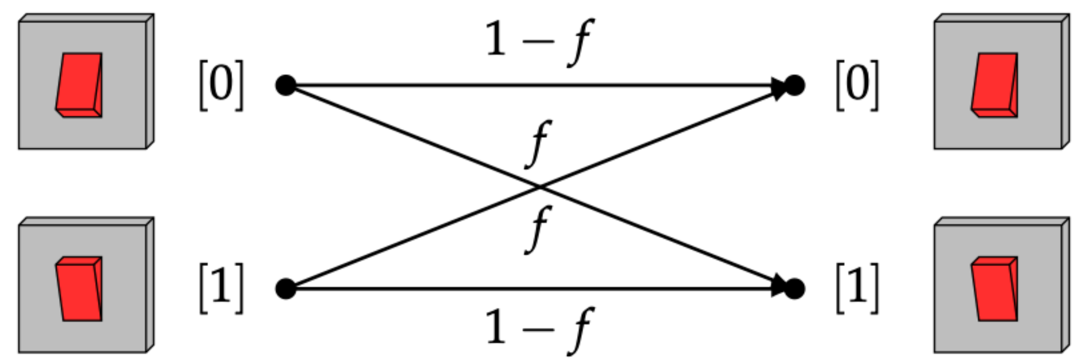
Alle Operationen auf QuBits sind invertierbar und damit reversibel

Bei probabilistischen Bits war das nicht der Fall -

vergleiche: probabilistischer Flip: $\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\hat{F}(f)[0] = (1-f)[0] + f[1]$$
$$\hat{F}(f)[1] = f[0] + (1-f)[1]$$

bit

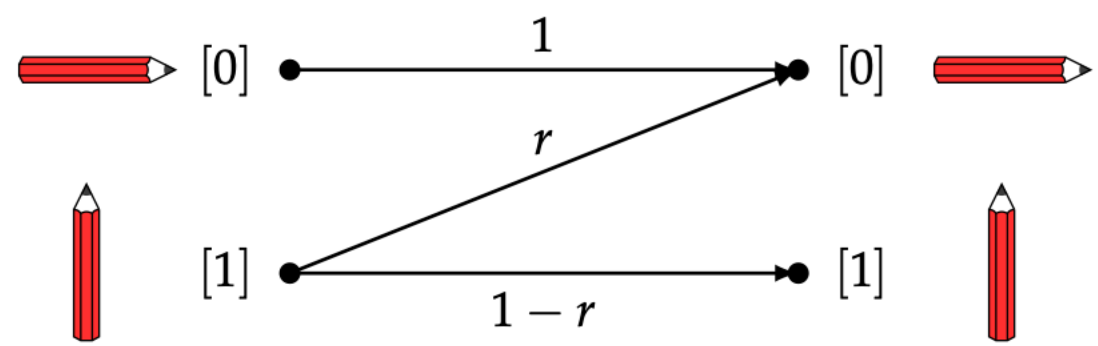


bit

Probabilistischer Reset

$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

bit



bit

Wdh.: Spiegelungen

Behauptung:
Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)

Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ **und NÔT**

Wir haben gezeigt:
$\hat{Z} = \hat{U}(-\pi/4)$ **NÔT** $\hat{U}(\pi/4)$
$\hat{Z} =$ **NÔT** $\hat{U}(\pi/2)$

Man findet: die allgemeinste Spiegelung (Reflektion) $\hat{V}(\theta)$ **hat die Form:**

$\hat{V}(\theta) =$ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

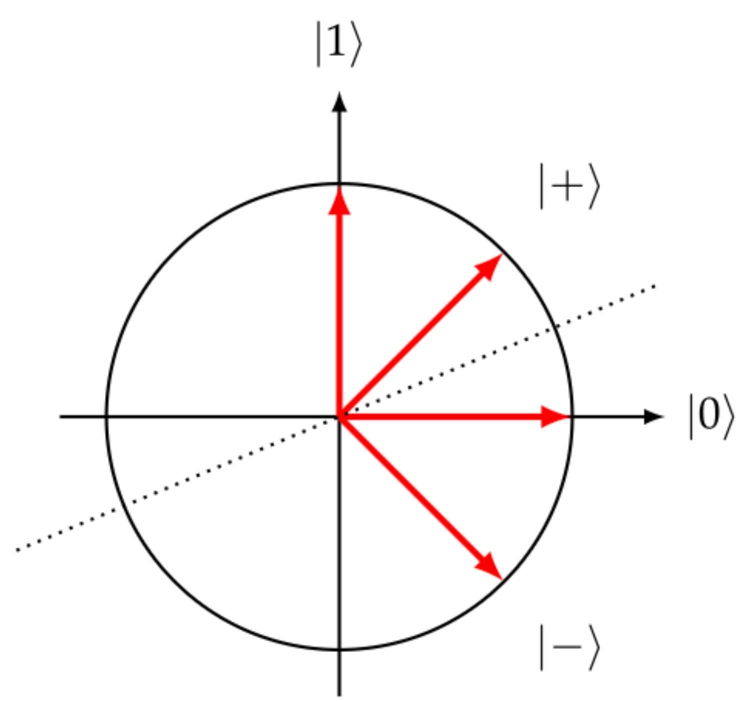
Wdh.: Hadamard

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$
(Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

$$\hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) =: |\,+\,\rangle, \qquad \hat{H}\,|\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) =: |\,-\,\rangle.$$



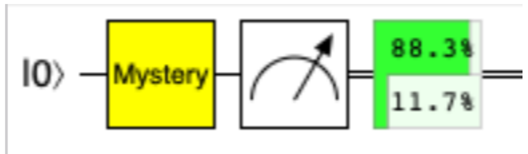
Spiegelung an der Achse

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$

Wdh.: Quantentomographie

Quantentomographie: Bestimme Zustand durch Messungen und Manipulationen

$$M|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

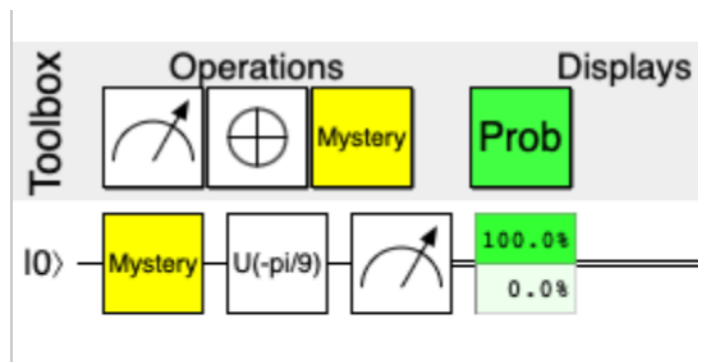


$$\psi_1^2 = 0.117 \qquad \psi_0^2 = 0.883$$

Ergebnis: $\pm\begin{pmatrix} \sqrt{88.3\%} \\ \sqrt{11.7\%} \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} \sqrt{88.3\%} \\ -\sqrt{11.7\%} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \theta = \pm\, 0.3491 = \pm\, \pi/9$

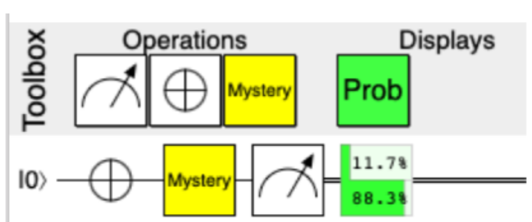
Rotiere um $+\pi/9$

Rotiere um $-\pi/9$



$$\Rightarrow \theta = +\,\pi/9$$

$$\hat{M}|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{9} \\ \sin\frac{\pi}{9} \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \theta' = \pm\, 1.2217 = \pm\frac{7\pi}{18} = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right)$$

Rotiere um $\frac{7\pi}{18}$

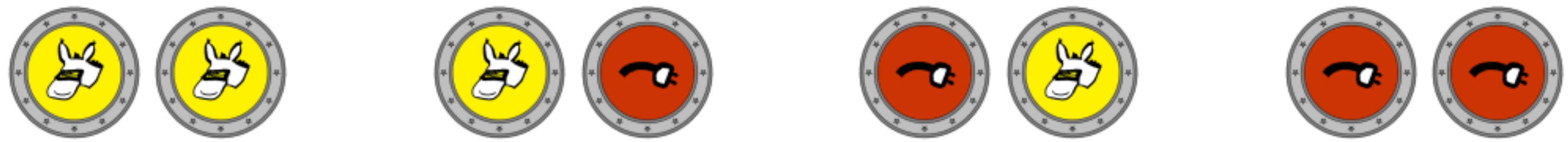
$$\Rightarrow \theta' = -\frac{7\pi}{18}$$

$$\hat{M}|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{7\pi}{18} \\ -\sin\frac{7\pi}{18} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{9} & \cos\frac{7\pi}{18} \\ \sin\frac{\pi}{9} & -\sin\frac{7\pi}{18} \end{pmatrix}}$$

Wdh.: 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben



00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

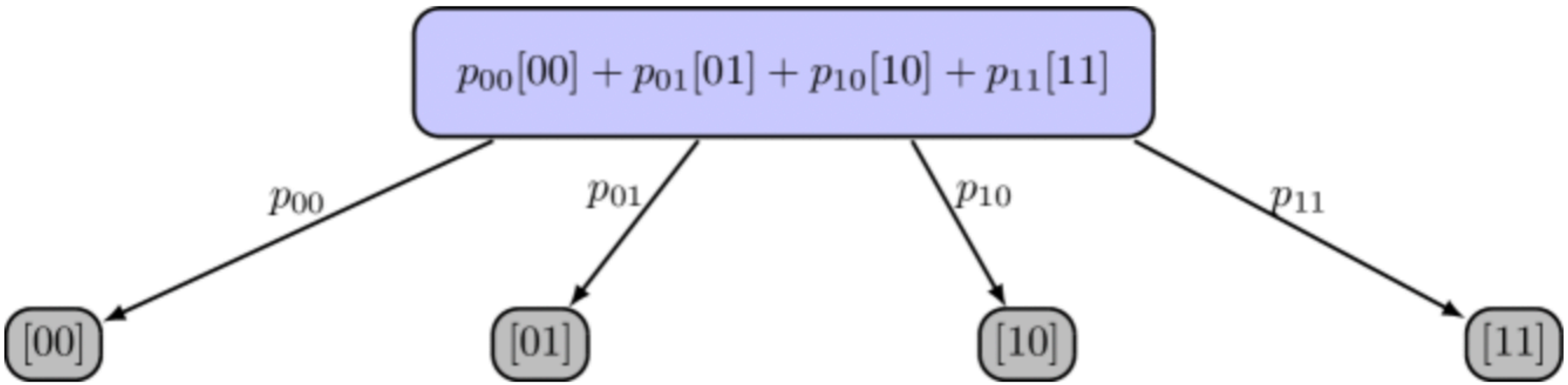
$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ und } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

Alternativ schreiben wir diesen Zustand als $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$

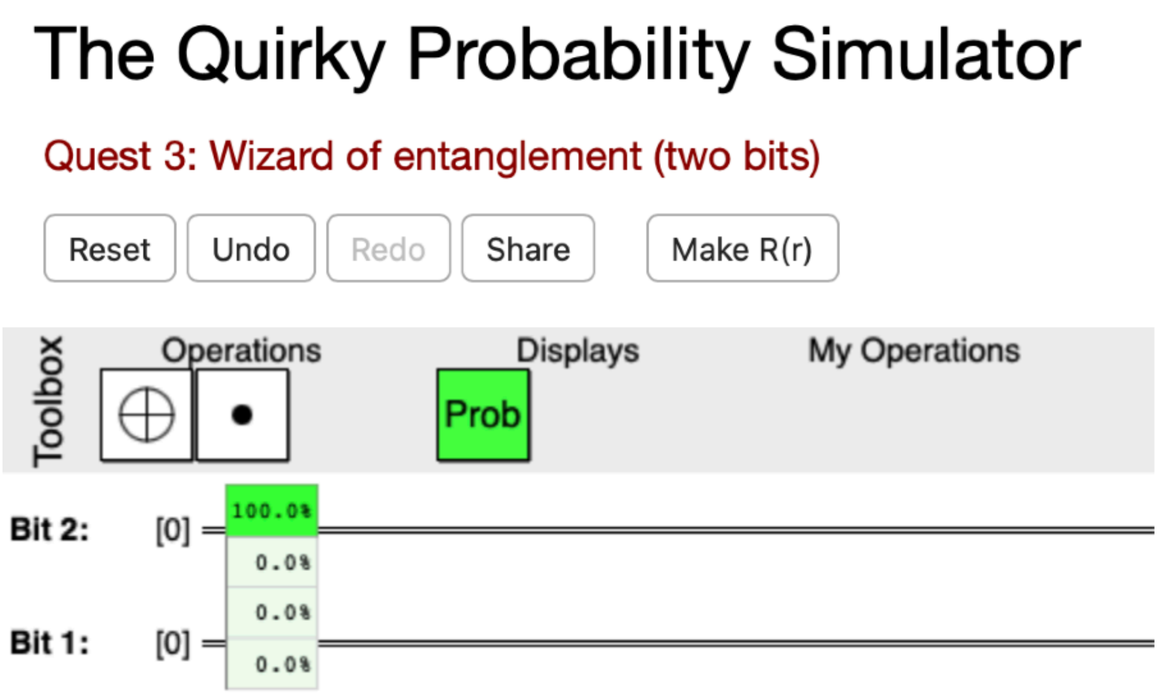
mit der Identifikation $[00] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [01] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [10] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [11] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Kompakte Notation $\frac{1}{2}[00] + 0[01] + 0[10] + \frac{1}{2}[11] = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

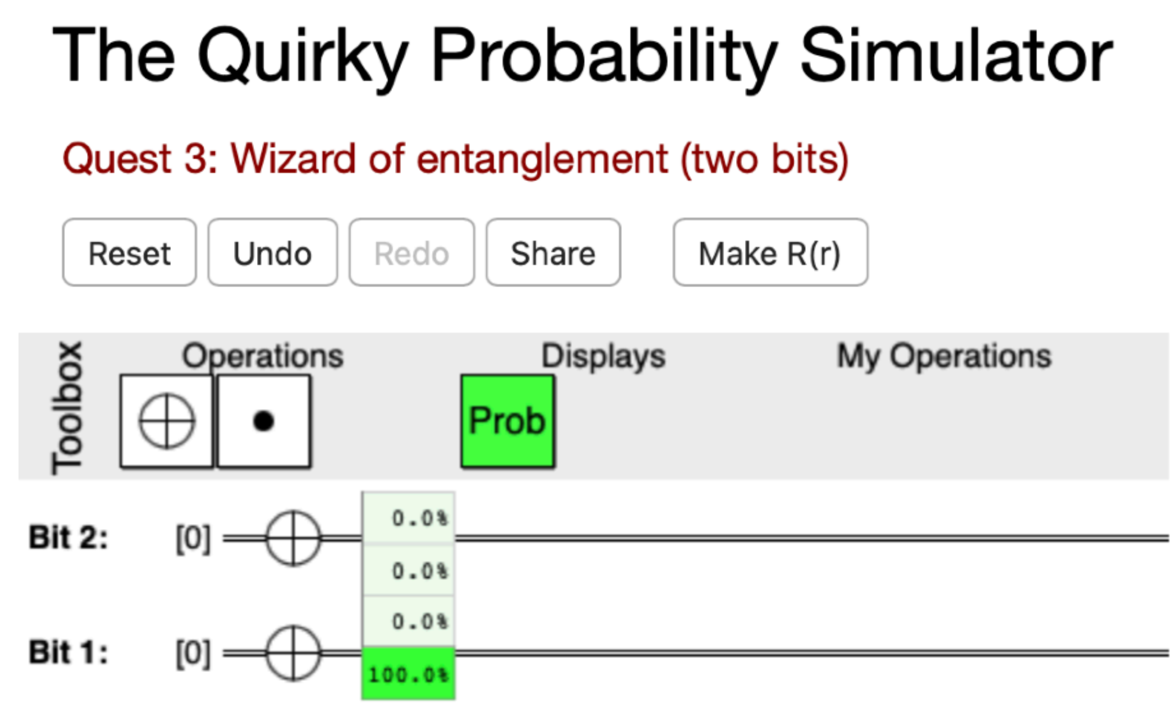
Wdh.: Beide Bits messen



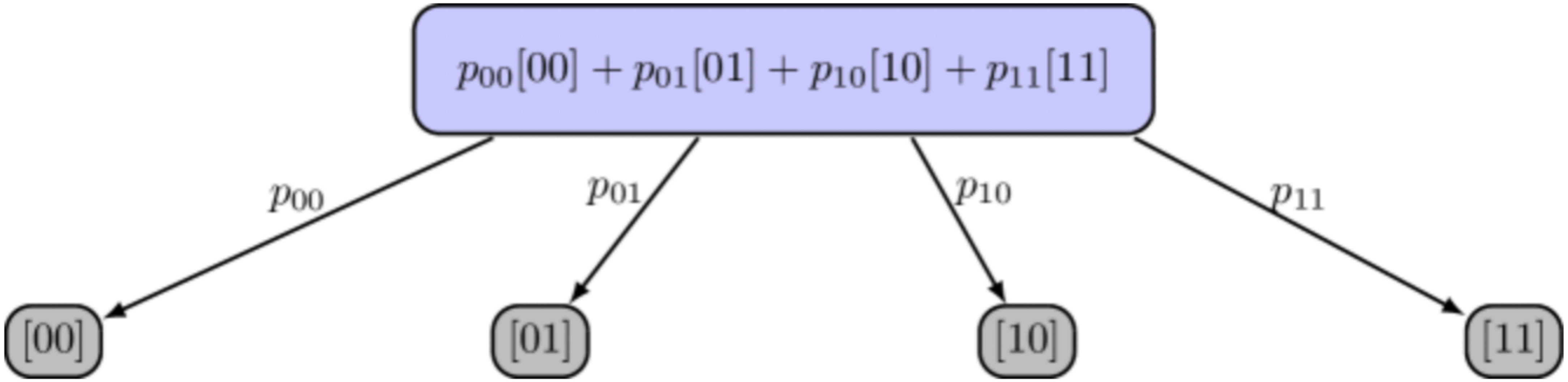
[00]



[11]



Wdh.: Beide Bits messen



Beispiel: beim Messen des Zustandes

1/2 [00] + 1/2 [11]

erhalten wir [00] und [11] mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 50%

Misst man bei diesem besonderen Zustand nur das erste Bit, dann kennt man automatisch auch den Wert des zweiten Bits,
d.h. die beiden EinzelBits sind perfekt korreliert

Wdh.: Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

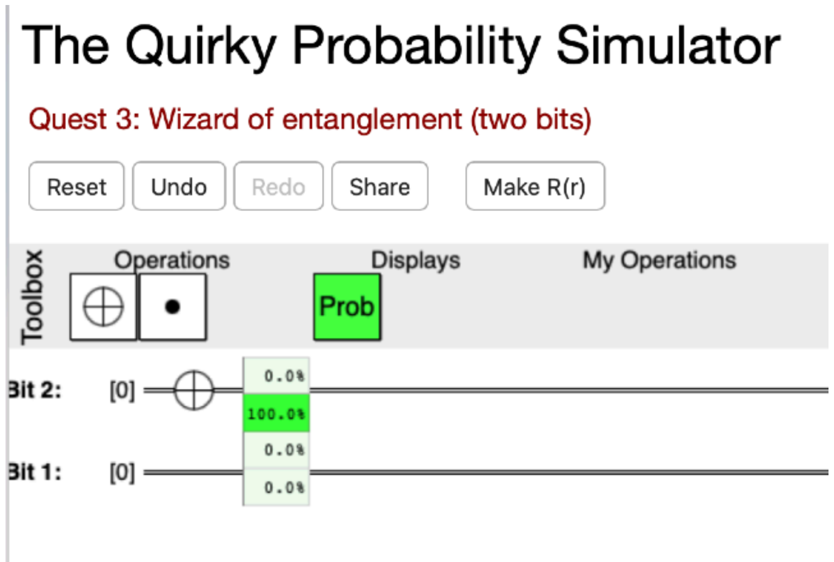
$$\mathrm{NOT}_2\,[00] = [01], \quad \mathrm{NOT}_2[01] = [00], \quad \mathrm{NOT}_2[10] = [11], \quad \mathrm{NOT}_2[11] = [10].$$

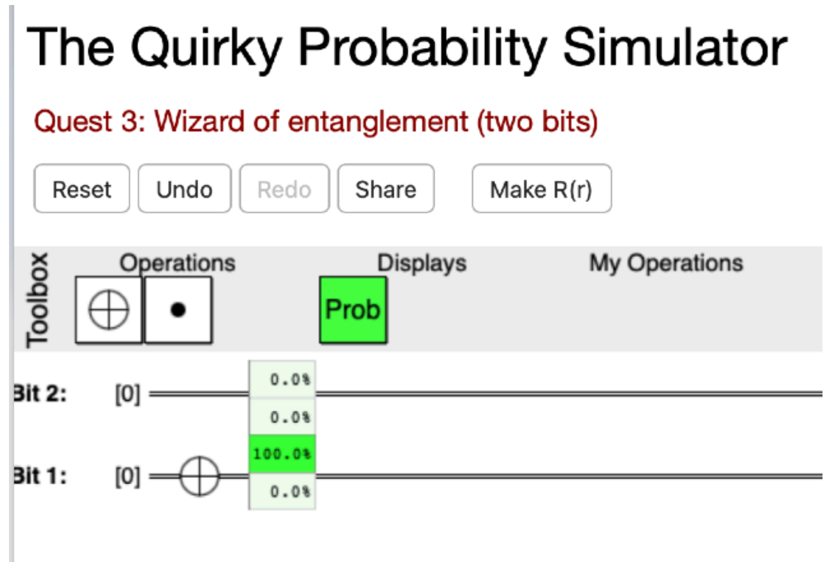
Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf probabilistisches Bit):

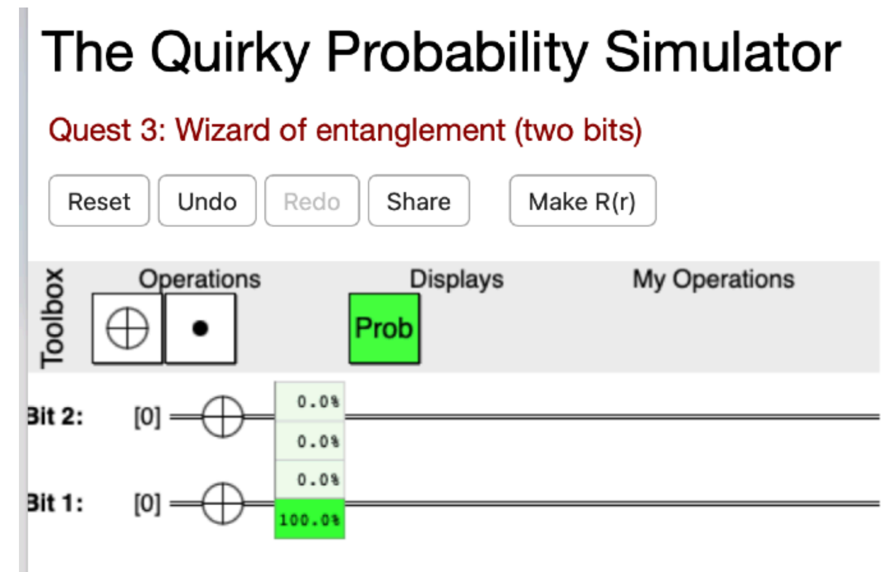
$$\begin{aligned}
&\mathrm{NOT}_2\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right)\\
&= p_{00}[01] + p_{01}[00] + p_{10}[11] + p_{11}[10]\\
&= p_{01}[00] + p_{00}[01] + p_{11}[10] + p_{10}[11],
\end{aligned}$$

$$\mathrm{NOT}_2 \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{00} \\ p_{11} \\ p_{10} \end{pmatrix}.$$

Wdh.: Lokale Operationen





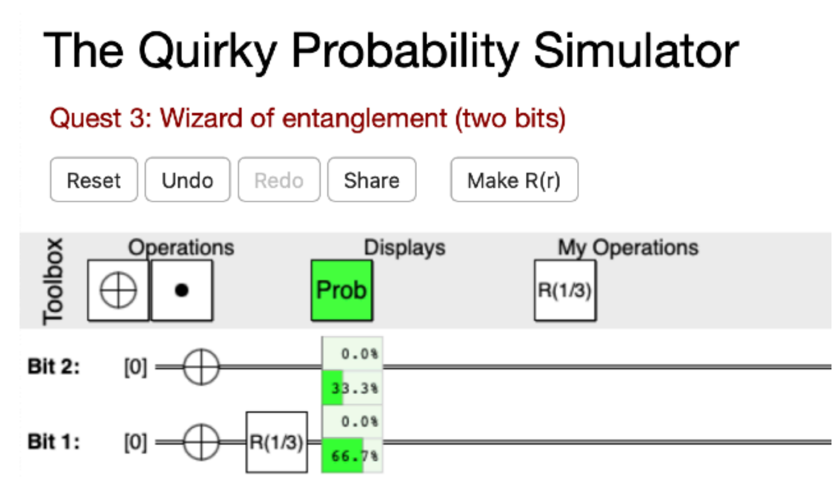


Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Beispiel: $\hat{R}(1/3)_1[11] = \frac{1}{3}[01] + \frac{2}{3}[11]$



Wdh.: Lokale Operationen

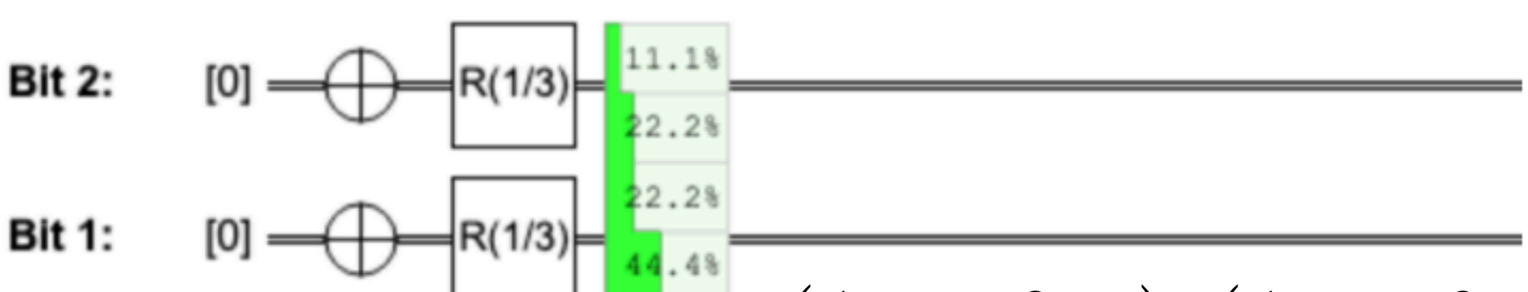
$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von Quirky in Gl. 3.12 richtig ist.

$$\hat{R}(r)_2[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_2[01] = r[00] + (1-r)[01]$$
$$\hat{R}(r)_2[10] = [10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

$$\hat{R}(1/3)[1] = \frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]$$



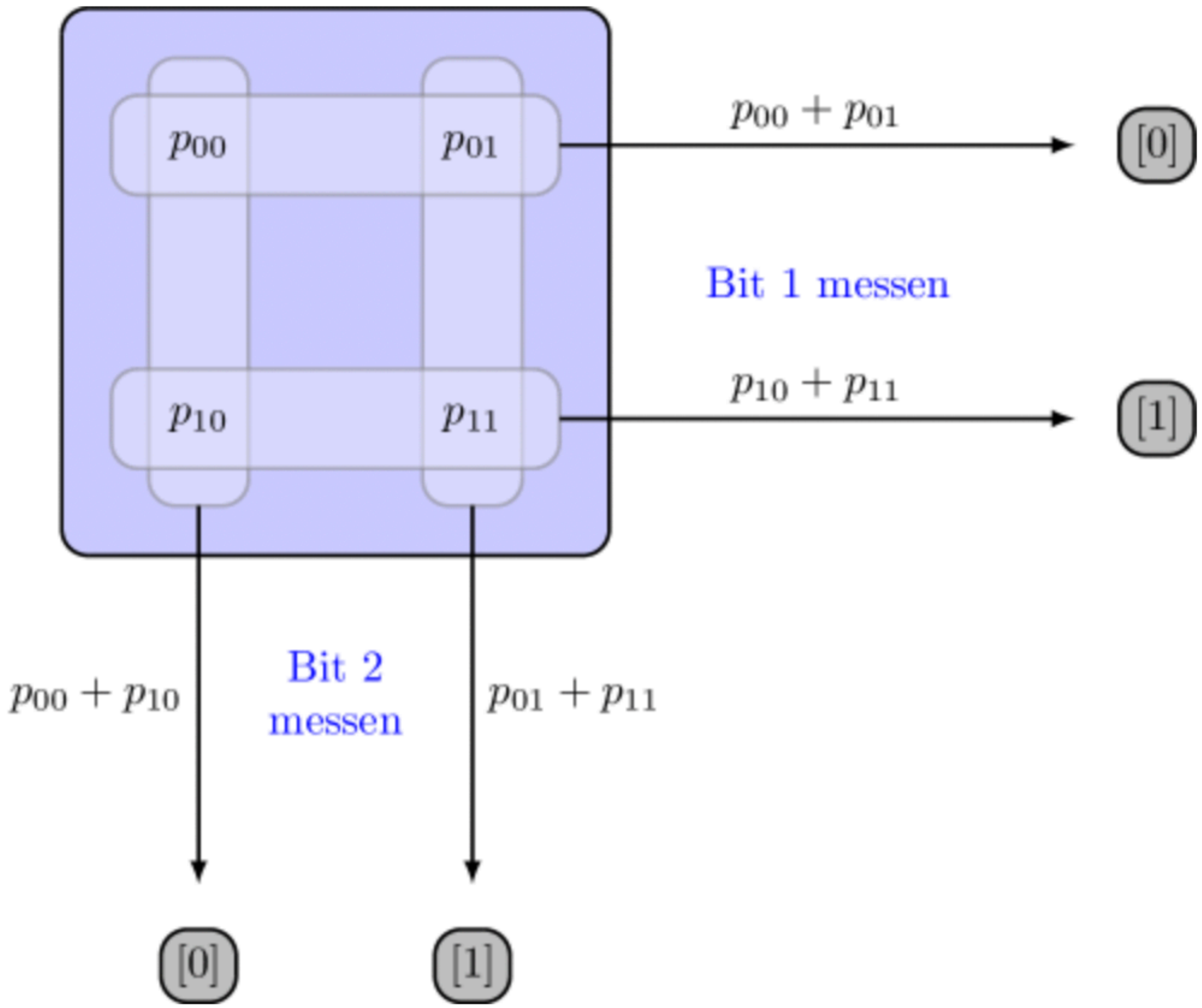
(3.12)

$$\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right)\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) = \frac{1}{9}[00] + \frac{2}{9}([01] + [10]) + \frac{4}{9}[11]$$

Wdh.: Nur ein Bit messen

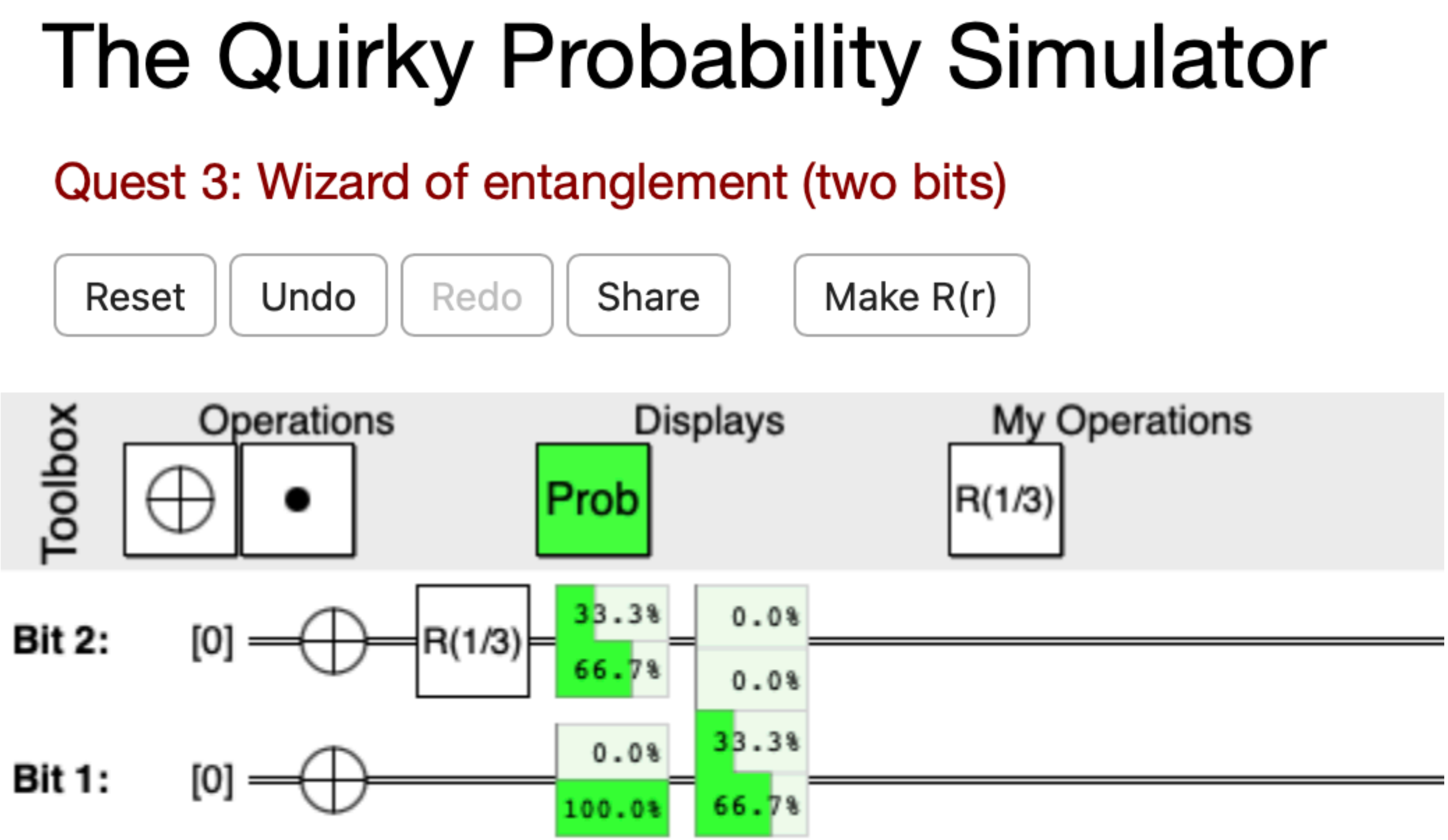
Betrachte den allgemeinen Zustand

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$



Wdh.: Nur ein Bit messen

Mit Quirky kann man auch einzelne Bits messen



Wdh.: Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

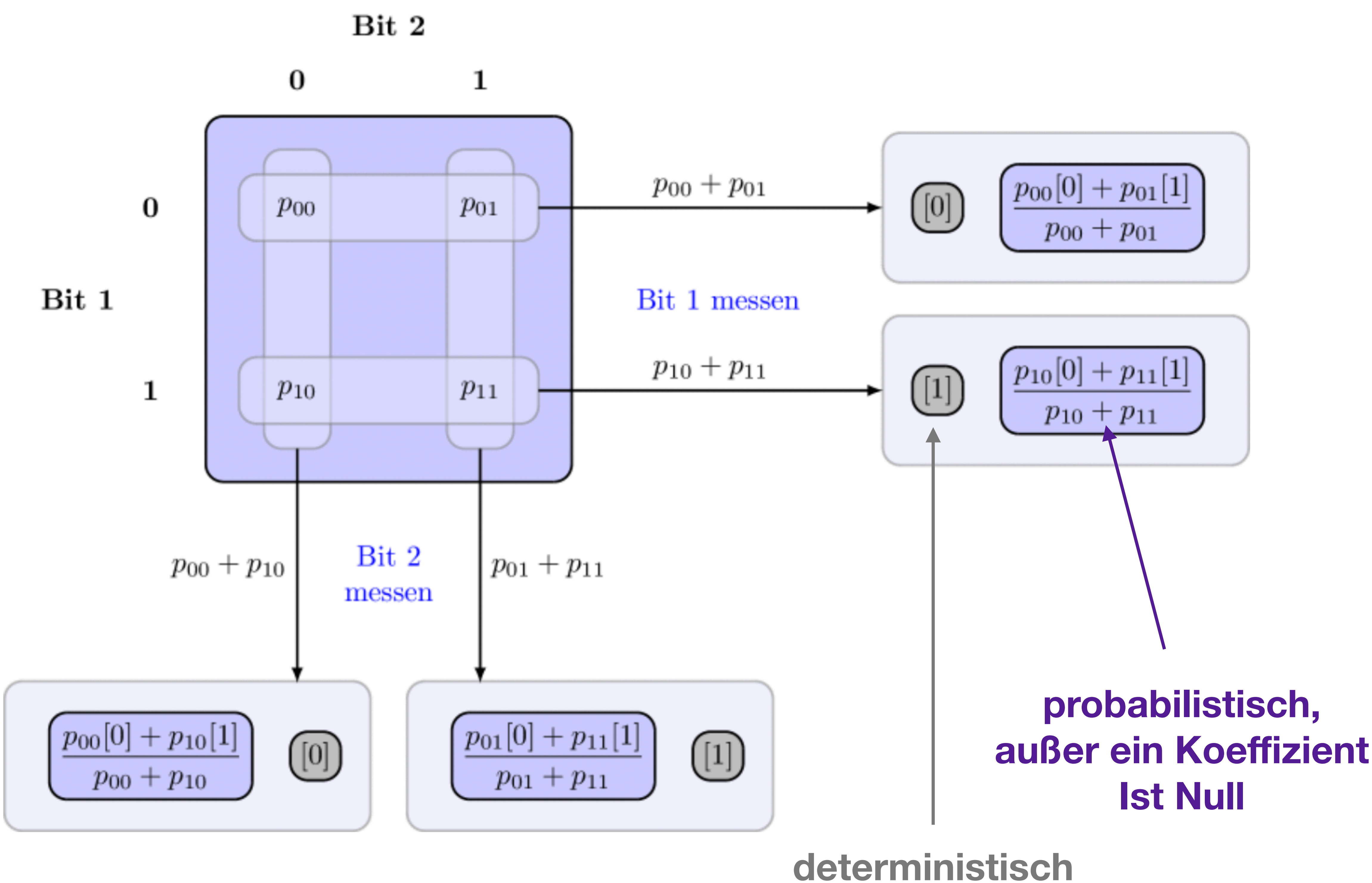
Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ **das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $p_{10} + p_{11}$ **das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messung des ersten im Zustand** $\frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}}[0] + \frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}[1]$

Durch die Summe $p_{10} + p_{11}$ **muss dividiert werden, damit die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 bleibt!**

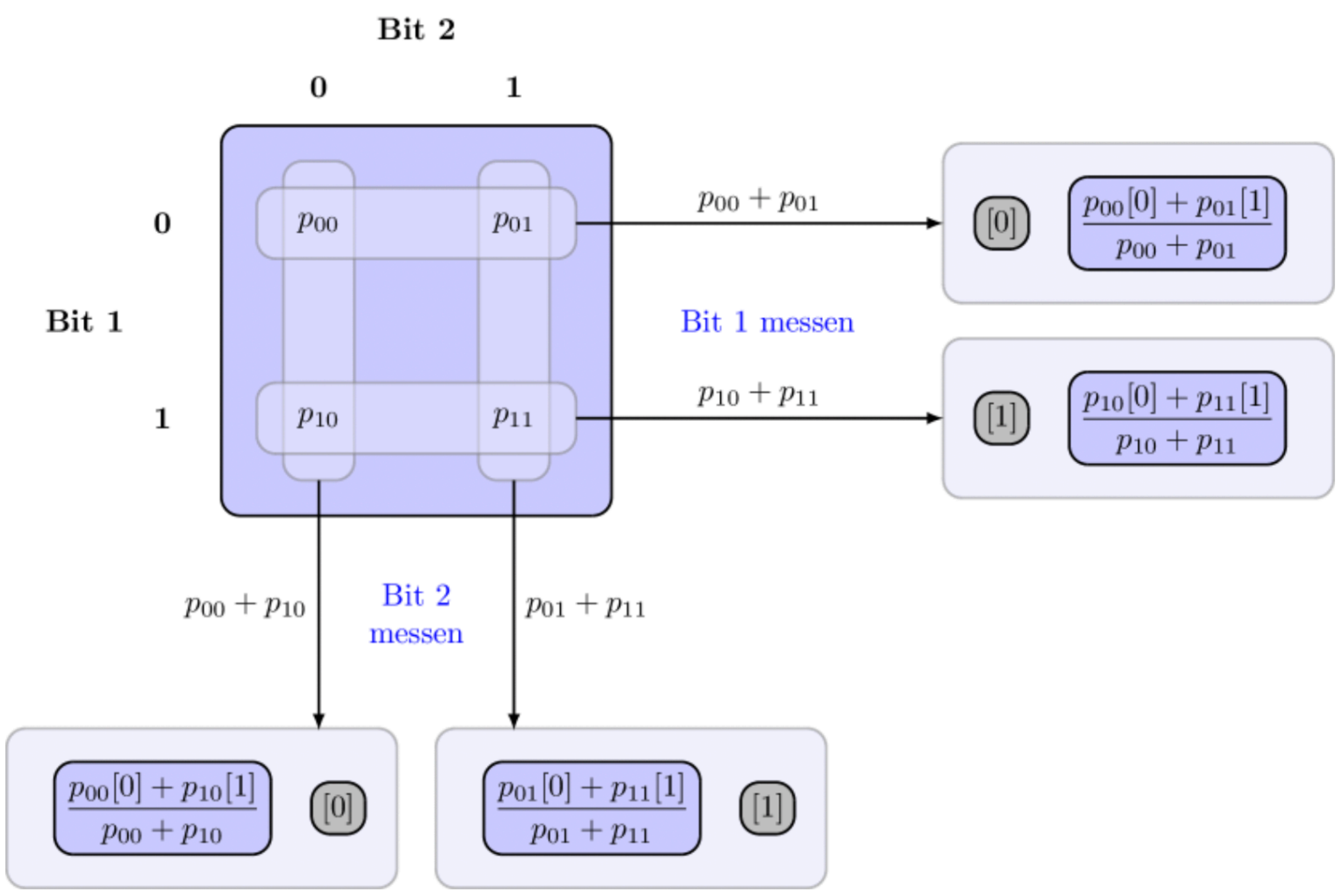
Wdh.: Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



Wdh.: Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



Hier macht es keinen Unterschied ob man beide gleichzeitig misst, oder erst das eine und dann das andere.

Beispiel: das Ergebnis $[11]$ kann man mit der Wahrscheinlichkeit p_{11} bestimmen

Oder erst das erste Bit mit $p_{10}+p_{11}$ und dann das zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{p_{11}}{p_{10}+p_{11}}$ **- das Produkt gibt wieder p_{11}**

Oder erst das zweite Bit mit $p_{01}+p_{11}$ und dann das zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{p_{11}}{p_{01}+p_{11}}$ **- das Produkt gibt wieder p_{11}**

Wdh.: SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt: $$\mathrm{SWAP}\,[a,b] = [b,a],$$

Mit Linearität erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SWAP}\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right)\\
&=p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11]\\
&=p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11].
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 3.3 (SWAP in der 4-Vektorschreibweise (optional)).

Schreibe die SWAP-Operation auf zwei probabilistischen Bits in der 4-Vektorschreibweise.

$$\mathrm{SWAP}\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{10} \\ p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix}.$$

Wdh.: Kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit $[0]$ ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**
- **Das Steuerbit ändert sich nicht**

$$1 \to 2$$

Steuerbit Zielbit

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Wdh.: Kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0
Das 2. Bit im Ergebnis entspricht dieser Operation

Formal kann man schreiben

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a,b] = [a, a \oplus b],$$

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Die Modulo 2 Operation $\bigoplus$ kann man auch als XOR (exklusives Oder - Entweder oder) bezeichnen

Wdh.: Kontrollierte NOT Operation

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a,b] = [a, a\oplus b],$$

Übungsaufgabe 3.4 (Steuer- und Zielbit vertauschen).

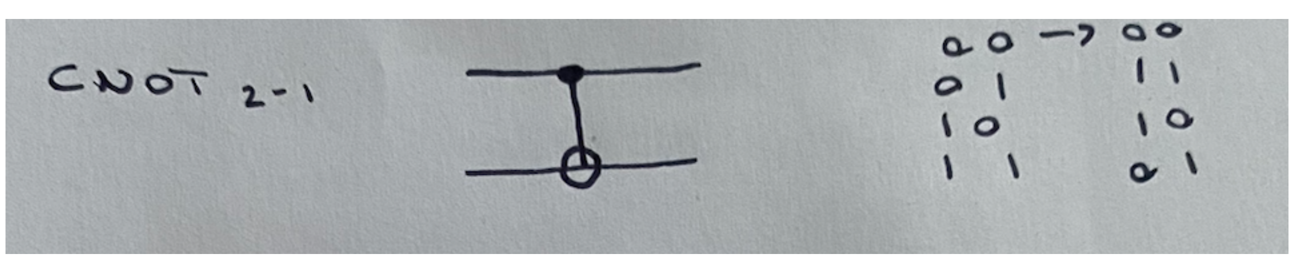
1. Schreibe die Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ in einer Formel wie in Gl. 3.20.
2. Wie kann man $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ durch SWAP und $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ implementieren?

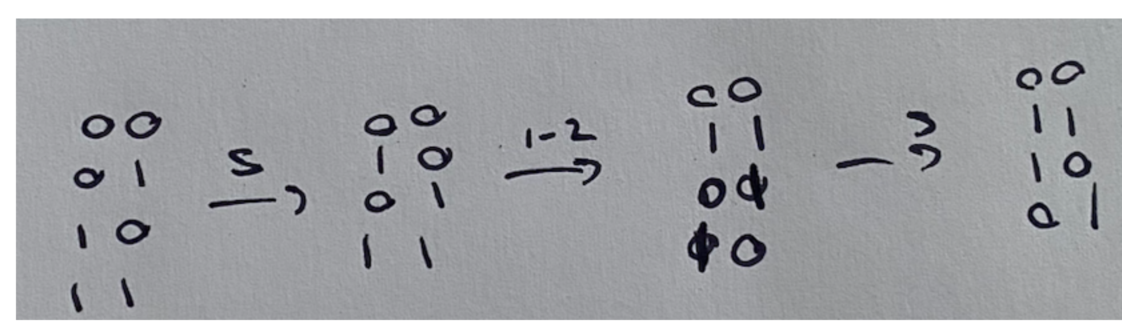
Lösung.

1. $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}[a,b] = [a\oplus b, b] = [b\oplus a, b]$.
2. Dies kann getan werden, indem man zuerst eine SWAP-Operation ausführt, dann $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$, und am Ende wieder SWAP. Tatsächlich, wenn wir Gl. 3.18 und 3.20 nutzen, gilt

$$\mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to 2}(\mathrm{SWAP}[a,b])) = \mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to 2}[b,a])$$

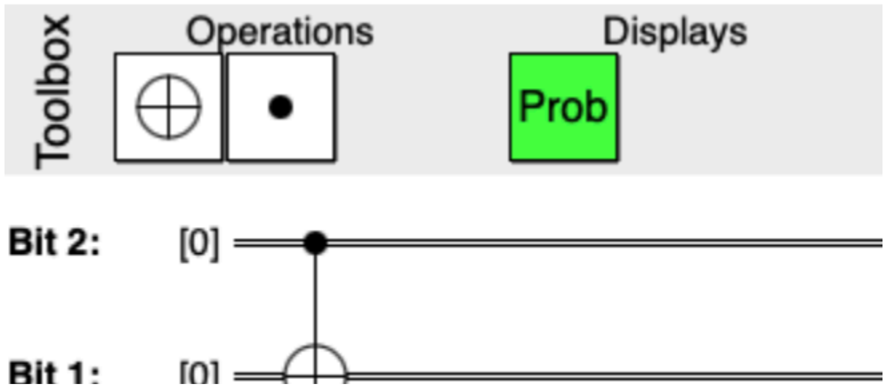
$$= \mathrm{SWAP}[b, b\oplus a] = [b\oplus a, b].$$

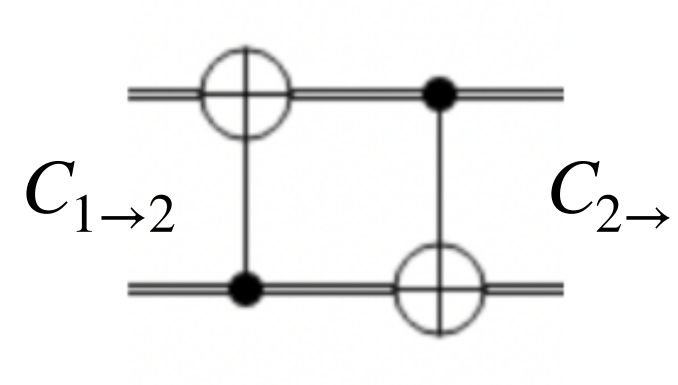




Wdh.: Kontrollierte NOT Operation

Mit Quirky: dot = Steuerbit; Kreuz = Zielbit



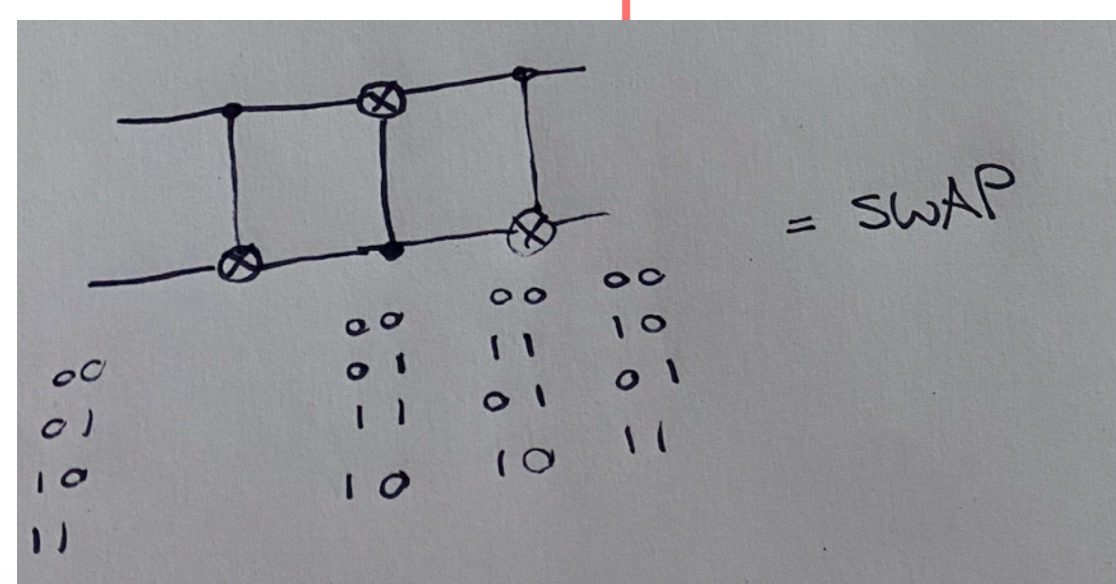


Hausaufgabe 3.2 (SWAP aus CNOT's).

Problem: Es ist beinahe Mitternacht, aber Bob bastelt immer noch an dem Prototypen seines probabilistischen-Bit Computers herum, den er am nächsten Tag in der Schule vorstellen will. Er ist so beschäftigt damit, seinen Zufallszahlengenerator zu kalibreren, dass er vergisst seinen Papageien Ziggy zu füttern. Um auf sich aufmerksam zu machen, stößt Ziggy Bob's Kaffetasse um und der ganze Kaffe fließt über Bob's selbstgebastelte Tastatur, mit der er Operationen auslösen kann. Entsetzt stellt Bob fest, dass die SWAP-Taste nicht mehr funktioniert! Zum Glück ist es der CNOT-Taste besser ergangen, sie funktioniert noch immer.

Fragen: Wie kann Bob die SWAP-Operation nur durch CNOT-Operationen implementieren? (Wenn du zeigen willst, dass zwei Operationen identisch sind, musst du das dank Linearität nur für die Basiszustände zeigen.)

Hinweis: Du solltest drei CNOT-Operationen benötigen.



Wdh.: Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0[00] + q_0 r_1[01] + q_1 r_0[10] + q_1 r_1[11].$$

Äquivalent: $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$ **mit:** $p_{ab} = q_a r_b.$

Besondere Eigenschaft: die beiden Bits sind unabhängig, d.h. beim Messen von einem Bit, erhält man keine Information über das andere Bit

Übungsaufgabe 3.5 (Unabhängige Bits (optional)).

Nimm an, dass wir das erste Bit aus dem Zustand Gl. 3.22 messen und das Ergebnis als $a \in \{0,1\}$ bezeichnen. Zeige, dass der Zustand des zweiten Bit r ist, unabhängig vom Ergebnis a des ersten Bits. Mit anderen Worten, die beiden Bits zu kombinieren und das erste Bit zu messen hat den Zustand des zweiten nicht beeinflusst (was es auch nicht sollte)!

Lösung.

Nutzen wir Abb. 3.3, so können wir den Zustand des zweiten Bits nach dem Messen berechnen als

$$\frac{p_{a0}[0] + p_{a1}[1]}{p_{a0} + p_{a1}} = \frac{q_a r_0[0] + q_a r_1[1]}{q_a r_0 + q_a r_1} = \frac{r_0[0] + r_1[1]}{r_0 + r_1} = r_0[0] + r_1[1] = r,$$

wobei wir q_a gestrichen haben und benutzt haben, dass $r_0 + r_1 = 1$.

Wdh.: Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zustände führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

Findet man

$$\begin{aligned} q \otimes r &= \big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big) \\ &= q_0 r_0 \big([0] \otimes [0]\big) + q_0 r_1 \big([0] \otimes [1]\big) + q_1 r_0 \big([1] \otimes [0]\big) + q_1 r_1 \big([1] \otimes [1]\big) \\ &= q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11]. \end{aligned}$$

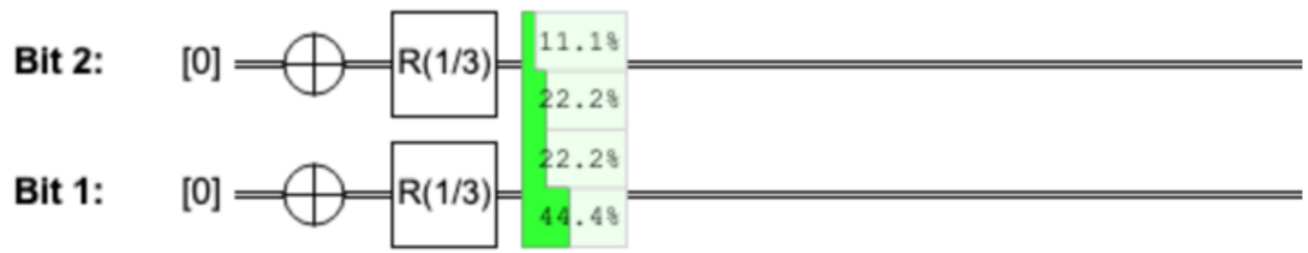
Dies war unser ursprüngliche 2 Bit Zustand von oben

In Vektornotation:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ q_1 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 r_0 \\ q_0 r_1 \\ q_1 r_0 \\ q_1 r_1 \end{pmatrix},$$

Wdh.: Produkt-Verteilungen

Wir hatten vorhin



$$\left(\frac{1}{3}[0]+\frac{2}{3}[1]\right)\otimes\left(\frac{1}{3}[0]+\frac{2}{3}[1]\right)=\frac{1}{9}[00]+\frac{2}{9}[01]+\frac{2}{9}[10]+\frac{4}{9}[11]=\begin{pmatrix}1/9\\2/9\\2/9\\4/9\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}11.1\%\\22.2\%\\22.2\%\\44.4\%\end{pmatrix},$$

Hausaufgabe 3.3 (Das Tensorprodukt)**.**

Finde zwei probabilistische Bits q und r, sodass folgende Gleichung gilt:

$$q\otimes r=0.48[00]+0.32[01]+0.12[10]+0.08[11].$$

$$q_0r_0 \qquad q_0r_1 \qquad q_1r_0 \qquad q_1r_1$$

$$\frac{r_0}{r_1}=\frac{48}{32}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{q_0}{q_1}=\frac{3}{2}\frac{32}{12}=4$$

$$r_0+r_1=1=\frac{3}{2}r_1+r_1=\frac{5}{2}r_1\Rightarrow r=\frac{3}{5}[0]+\frac{2}{5}[1]$$

$$q_0+q_1=1=4q_1+q_1=5q_1\Rightarrow q=\frac{4}{5}[0]+\frac{1}{5}[1]$$

Wdh.: Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b].$$

Derartige Zustände nennt man Produkt-Zustände oder Produkt-Verteilungen

Ist jeder 2-Bit Zustand ein Produktzustand?

Nein!

Wdh.: Korrelierte Verteilungen

Es gibt auch 2-Bit Zustände, die nicht Produktzustände sind,
d.h. sie können nicht als $[a] \otimes [b]$ geschrieben werden

Z.B. $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

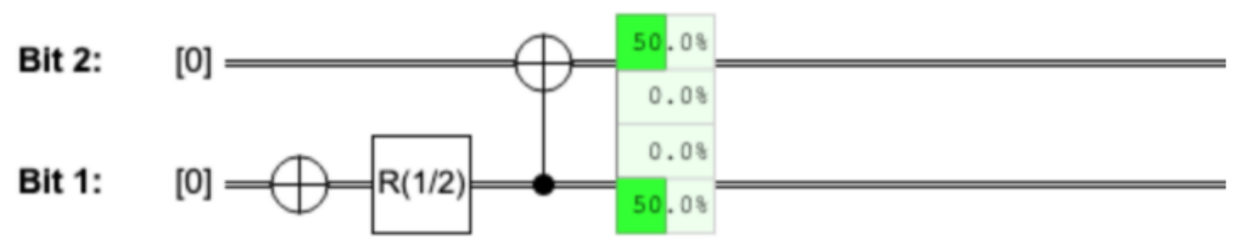
Derartige Zustände nennt man korreliert

Misst man das erste Bit, dann kennt man automatisch den Wert des zweiten!

In diesem Fall: Zustand des 1. Bits = Zustand des 2. Bits (perfekt korrelierte Zustände)

Wdh.: Korrelierte Verteilungen

Konstruktion von $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ mit Quirky



Übungsaufgabe 3.6 (Perfekt korrelierte Zufallsbits generieren)**.**

Erkläre, warum die obige Berechnung in Quirky den Zustand $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ generiert.

Lösung.

Der Zustand vor der kontrollierten NOT-Operation ist

$$\left(\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]\right) \otimes [0] = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10].$$

Nachdem wir die kontrollierte NOT-Operation angewendet haben, erhalten wir

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10]\right) = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Wdh.: Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

Für Produkt-Zustände erhält man immer $\Delta(p) = 0$**,**
andernfalls, ist der Zustand korreliert.

Beispiel: $\Delta\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$

Beweis: jeder korrelierte Zustand liefert $\neq 0$
(Siehe Skript)

Wdh.: Korrelierte Verteilungen

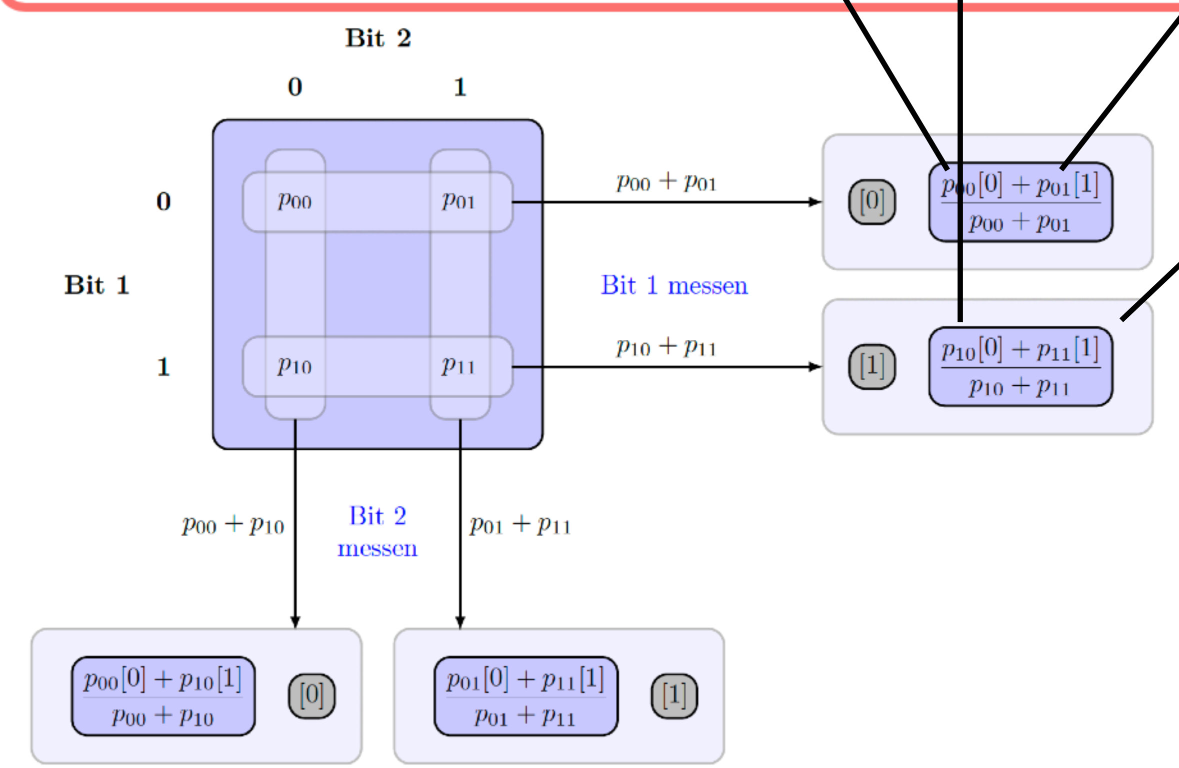
Hausaufgabe 3.4 (Unabhängigkeit impliziert Produkt (optional)).

Nimm an, dass p sich in einer beliebigen Zwei-Bit-Verteilung befindet, sodass der Zustand des zweiten Bits unabhängig vom Messergebnis des ersten Bit ist. Zeige, dass ein solches p eine Produktverteilung ist. Das schaffst du in zwei Schritten:

1. Das Messergebnis des ersten Bits kann entweder 0 oder 1 sein. Mit Abb. 3.3 kannst du die verbleibenden Zustände des zweiten Bits in beiden Fällen vergleichen und die folgenden Identitäten zeigen:

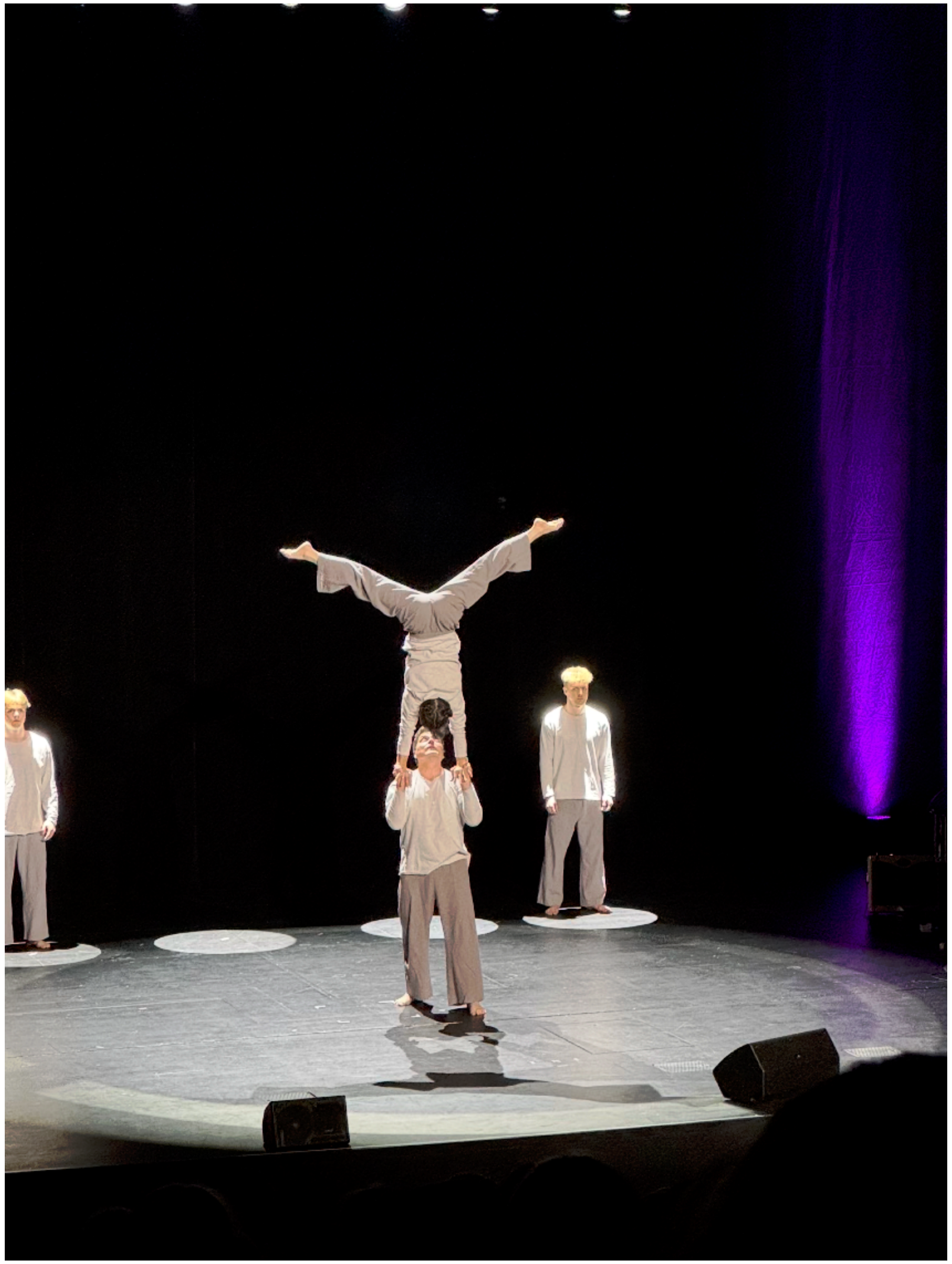
$$\frac{p_{00}}{p_{00}+p_{01}} = \frac{p_{10}}{p_{10}+p_{11}}, \qquad \frac{p_{01}}{p_{00}+p_{01}} = \frac{p_{11}}{p_{10}+p_{11}}.$$

2. Nutze diese Gleichungen sowie Gl. 3.29, um zu zeigen, dass $\Delta(p) = 0$



Quest 3: Verzaubernde Verschränkungen

3.2 Zwei QuantenBits



3.2 Zwei QuantenBits

Ein Zwei-QuBit Zustand lautet allgemein:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

3.2 Zwei QuantenBits

Ein Zwei-QuBit Zustand lautet allgemein:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

mit $|\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2 + |\psi_{10}|^2 + |\psi_{11}|^2 = 1$ **und somit** $\psi_{ij} \in [-1,1]$

3.2 Zwei QuantenBits

Ein Zwei-QuBit Zustand lautet allgemein:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}\,|00\rangle + \psi_{01}\,|01\rangle + \psi_{10}\,|10\rangle + \psi_{11}\,|11\rangle$$

mit $|\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2 + |\psi_{10}|^2 + |\psi_{11}|^2 = 1$ **und somit** $\psi_{ij} \in [-1,1]$

Als Basiszustände wählen wir

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

3.2 Zwei QuantenBits

Ein Zwei-QuBit Zustand lautet allgemein:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

mit $|\psi_{00}|^2 + |\psi_{01}|^2 + |\psi_{10}|^2 + |\psi_{11}|^2 = 1$ **und somit** $\psi_{ij} \in [-1,1]$

Als Basiszustände wählen wir

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Damit lautet der allgemeine 2-QuBit Zustand $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{10} \\ \psi_{11} \end{pmatrix}$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,,\ |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,, |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,, |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,, |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und** $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,, |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,, |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,, |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und** $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden** $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,,\ |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und** $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden**

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,,\ |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und** $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden**

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Derartige Zustände nennt man Produktzustände

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,,\ |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und**
$|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden**
$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$
Derartige Zustände nennt man Produktzustände

Beachte: Nicht alle 2-QuBit Zustände sind Produktzustände

3.2 Zwei QuantenBits

Wir benutzen auch bei Zwei-QuBit Zuständen das Tensor-Produkt $\otimes$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,,\ |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,,\ |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Aus zwei allgemeinen Ein QuBit Zuständen $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ **und** $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ **kann folgendes Tensorprodukt gebildet werden**

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Derartige Zustände nennt man Produktzustände

Beachte: Nicht alle 2-QuBit Zustände sind Produktzustände

Übungsaufgabe 3.7: Tensorprodukt und Produktzustände

Erinnere dich an die Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ aus Übungsaufgabe 2.1.

1. Schreibe $|+\rangle \otimes |-\rangle$ in der Form aus Gl. (3.30).
2. Ist der Zustand $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right)$ ein Produktzustand?

3.2 Zwei QuantenBits

Quirky: https://www.quantum-quest.org/quirky

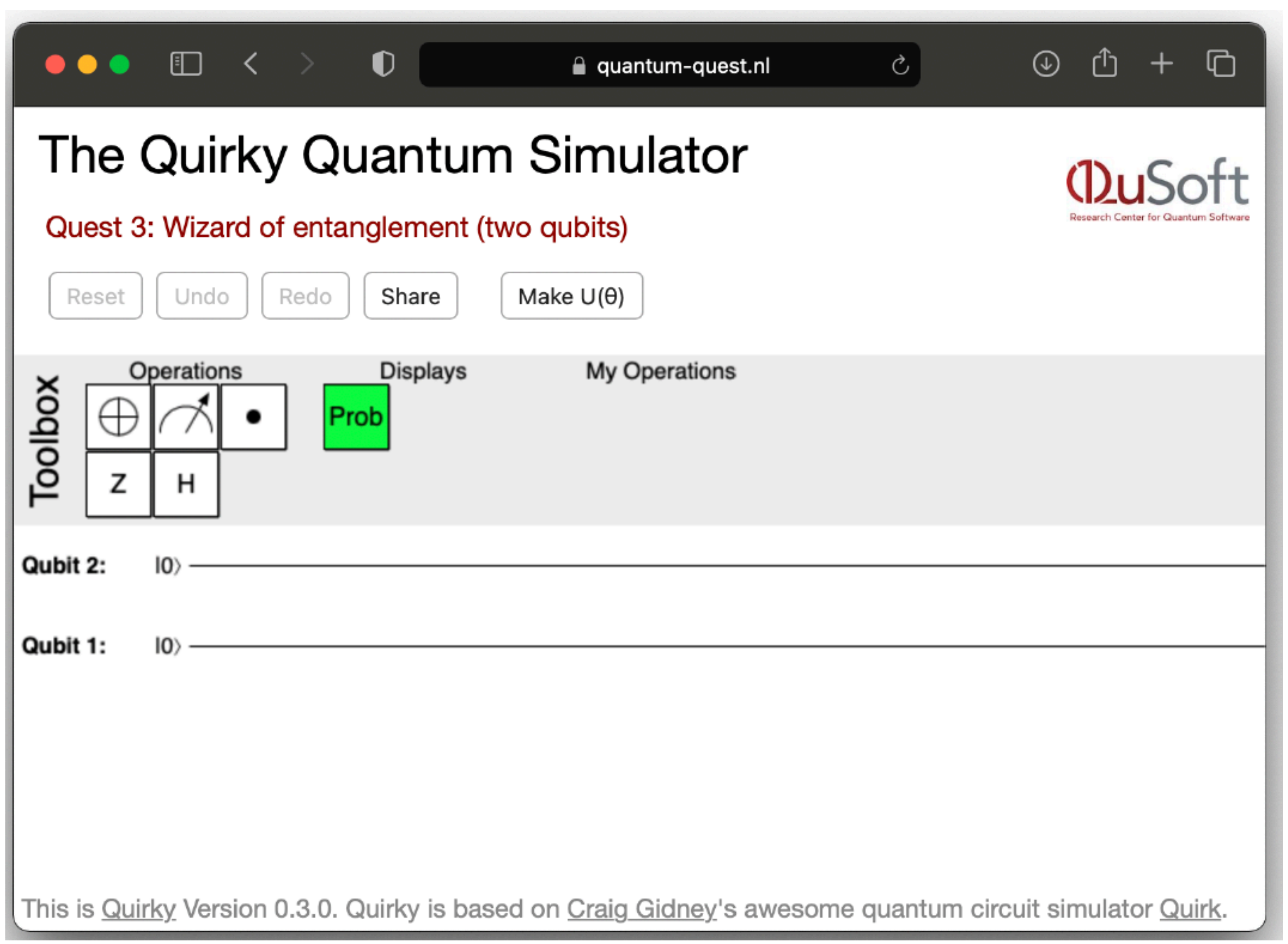
Quest 3 -> 2 QuBits

3.2 Zwei QuantenBits

Quirky: https://www.quantum-quest.org/quirky

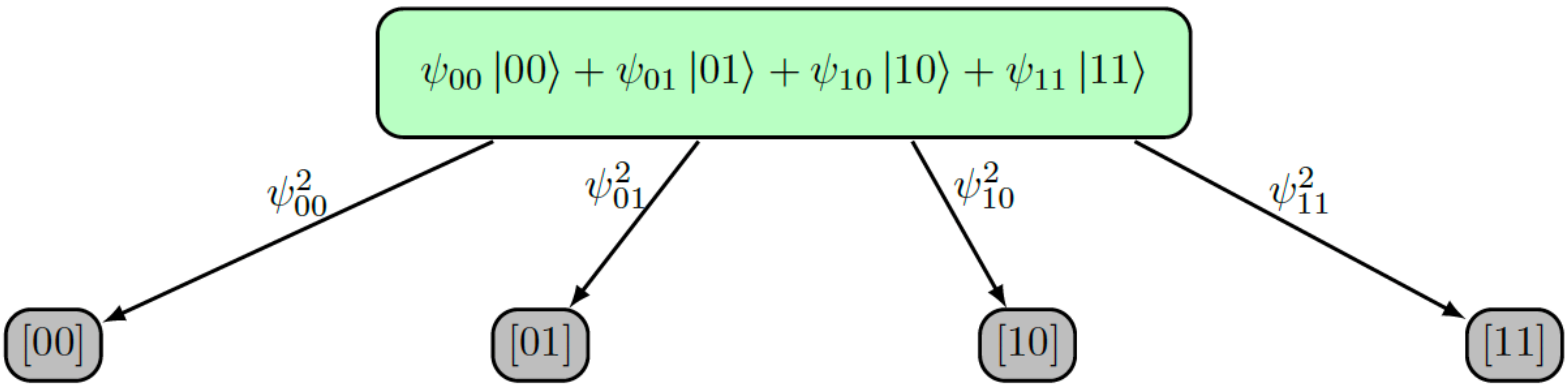
Quest 3 -> 2 QuBits

- **Start mit** $|00\rangle$
- **3 neue Boxen: Z, H, und ● , keine Mystery Box**

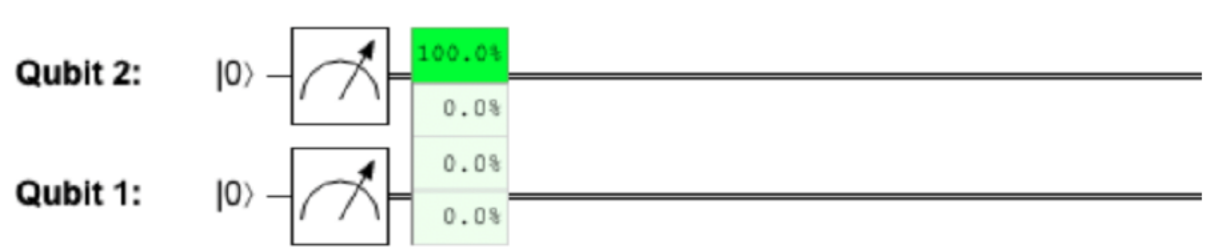


3.2.1 Zwei QuBits messen

Ähnlich wie 2 probabilistische Bits, aber nun Amplituden



Messung mit Quirky



3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

Beispiel: NOT Operation auf 1. oder auf 2. QuBit

3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

Beispiel: NOT Operation auf 1. oder auf 2. QuBit

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{NOT}_1\ |00\rangle = |10\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |01\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |10\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |11\rangle = |01\rangle\,, \\
&\mathrm{NOT}_2\ |00\rangle = |01\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |01\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |10\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |11\rangle = |10\rangle\,.
\end{aligned}
$$

3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

Beispiel: NOT Operation auf 1. oder auf 2. QuBit

$$\mathrm{NOT}_1\,|00\rangle = |10\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|01\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|10\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|11\rangle = |01\rangle\,,$$
$$\mathrm{NOT}_2\,|00\rangle = |01\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|01\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|10\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|11\rangle = |10\rangle\,.$$

Anwendung: Erzeugung aller 4 Basiszustände aus $|00\rangle$

3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

Beispiel: NOT Operation auf 1. oder auf 2. QuBit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NOT}_1\,|00\rangle = |10\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|01\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|10\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\,|11\rangle = |01\rangle\,, \\
&\mathrm{NOT}_2\,|00\rangle = |01\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|01\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|10\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\,|11\rangle = |10\rangle\,.
\end{aligned}$$

Anwendung: Erzeugung aller 4 Basiszustände aus $|00\rangle$

$$|00\rangle = |00\rangle\,, \quad |01\rangle = \mathrm{NOT}_2\,|00\rangle\,, \quad |10\rangle = \mathrm{NOT}_1\,|00\rangle\,, \quad |11\rangle = \mathrm{NOT}_2\,\mathrm{NOT}_1\,|00\rangle\,.$$

3.2.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: ein QuBit wird einzeln manipuliert

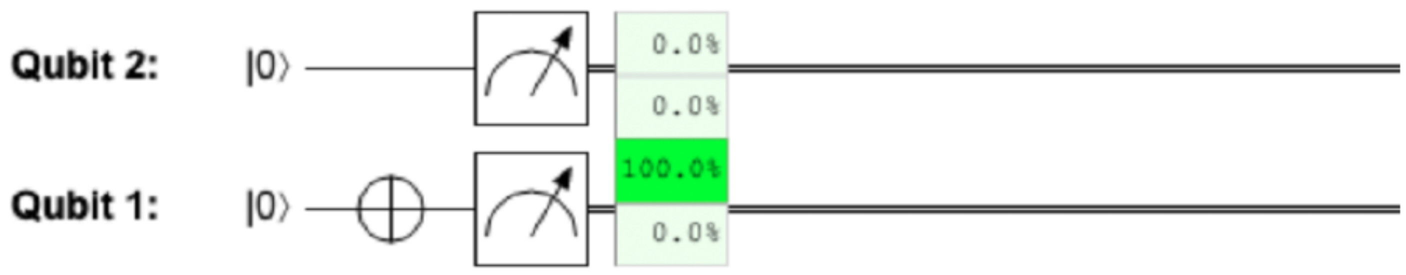
Beispiel: NOT Operation auf 1. oder auf 2. QuBit

$$\begin{aligned}&\mathrm{NOT}_1\ |00\rangle = |10\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |01\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |10\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_1\ |11\rangle = |01\rangle\,,\\ &\mathrm{NOT}_2\ |00\rangle = |01\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |01\rangle = |00\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |10\rangle = |11\rangle\,, \quad \mathrm{NOT}_2\ |11\rangle = |10\rangle\,.\end{aligned}$$

Anwendung: Erzeugung aller 4 Basiszustände aus $|00\rangle$

$$|00\rangle = |00\rangle\,, \quad |01\rangle = \mathrm{NOT}_2\ |00\rangle\,, \quad |10\rangle = \mathrm{NOT}_1\ |00\rangle\,, \quad |11\rangle = \mathrm{NOT}_2\,\mathrm{NOT}_1\ |00\rangle\,.$$

Lokale Operation mit Quirky $|10\rangle = \mathrm{NOT}_1\ |00\rangle$



3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ **sei eine beliebige 1-QuBit Operation**

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die
2-QuBit Operation $\hat{U}_1$auf jeden Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a,b \in \{0,1\}$

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$ auf jeden Basisvektor $|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a, b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a, b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$ auf jeden Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a,b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a,b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ **sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die**
2-QuBit Operation $\hat{U}_1$**auf jeden Basisvektor** $|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ **mit** $a, b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a, b\rangle = \hat{U} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ **auf einen beliebigen Zustand** $|\psi\rangle$

$$\hat{U}_1 |\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1 |00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1 |01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1 |10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1 |11\rangle$$

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$auf jeden Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a,b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1|a,b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\hat{U}_1|\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1|00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1|01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1|10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1|11\rangle$$

Analog definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_2$ als

$$\hat{U}_2|a,b\rangle = |a\rangle \otimes \hat{U}|b\rangle$$

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$auf jeden Basisvektor $|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a, b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a, b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\hat{U}_1 |\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1 |00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1 |01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1 |10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1 |11\rangle$$

Analog definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_2$ als

$$\hat{U}_2 |a, b\rangle = |a\rangle \otimes \hat{U}|b\rangle$$

- **Mögliche 1 QuBit Operationen: Rotationen $\hat{U}(\theta)$ und Spiegelungen $\hat{V}(\theta) =$ NÔT $\hat{U}(\theta)$**

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$auf jeden Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a, b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1|a,b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\hat{U}_1|\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1|00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1|01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1|10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1|11\rangle$$

Analog definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_2$ als

$$\hat{U}_2|a,b\rangle = |a\rangle \otimes \hat{U}|b\rangle$$

- **Mögliche 1 QuBit Operationen: Rotationen $\hat{U}(\theta)$ und Spiegelungen $\hat{V}(\theta) =$ NÔT $\hat{U}(\theta)$**
- **Obige Definitionen gelten auch für beliebige Produktzustände**

3.2.2 Lokale Operationen

$\hat{U}$ sei eine beliebige 1-QuBit Operation, dann definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_1$auf jeden Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ mit $a,b \in \{0,1\}$

$$\hat{U}_1 |a,b\rangle = \hat{U}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

Anwendung von $\hat{U}_1$ auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

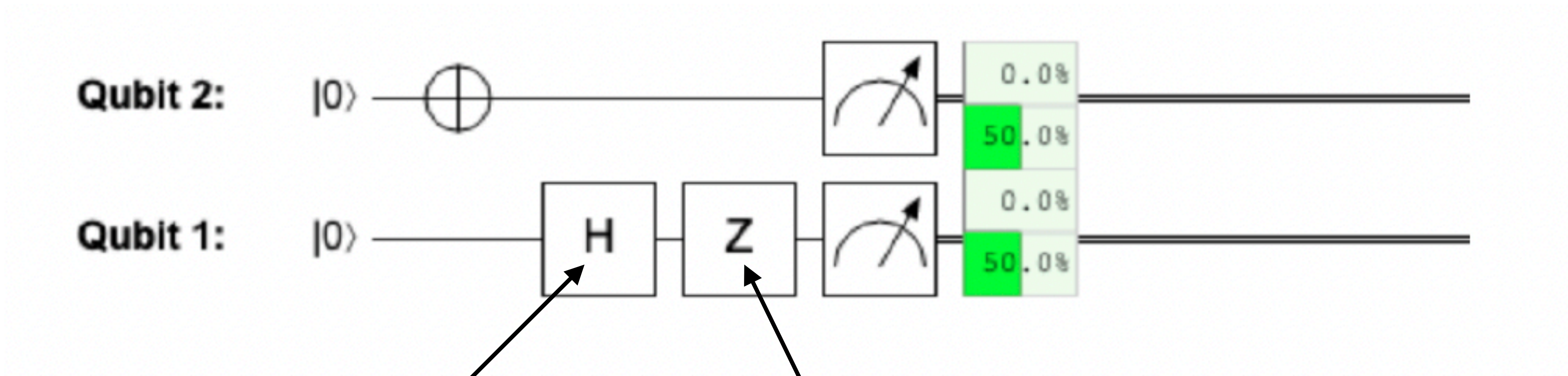
$$\hat{U}_1 |\Psi\rangle = \psi_{00}\hat{U}_1|00\rangle + \psi_{01}\hat{U}_1|01\rangle + \psi_{10}\hat{U}_1|10\rangle + \psi_{11}\hat{U}_1|11\rangle$$

Analog definieren wir die 2-QuBit Operation $\hat{U}_2$ als

$$\hat{U}_2 |a,b\rangle = |a\rangle \otimes \hat{U}|b\rangle$$

- **Mögliche 1 QuBit Operationen: Rotationen $\hat{U}(\theta)$ und Spiegelungen $\hat{V}(\theta) =$ NÔT $\hat{U}(\theta)$**
- **Obige Definitionen gelten auch für beliebige Produktzustände**
  $\hat{U}_1(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \hat{U}|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ **und** $\hat{U}_2(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes \hat{U}|\beta\rangle$

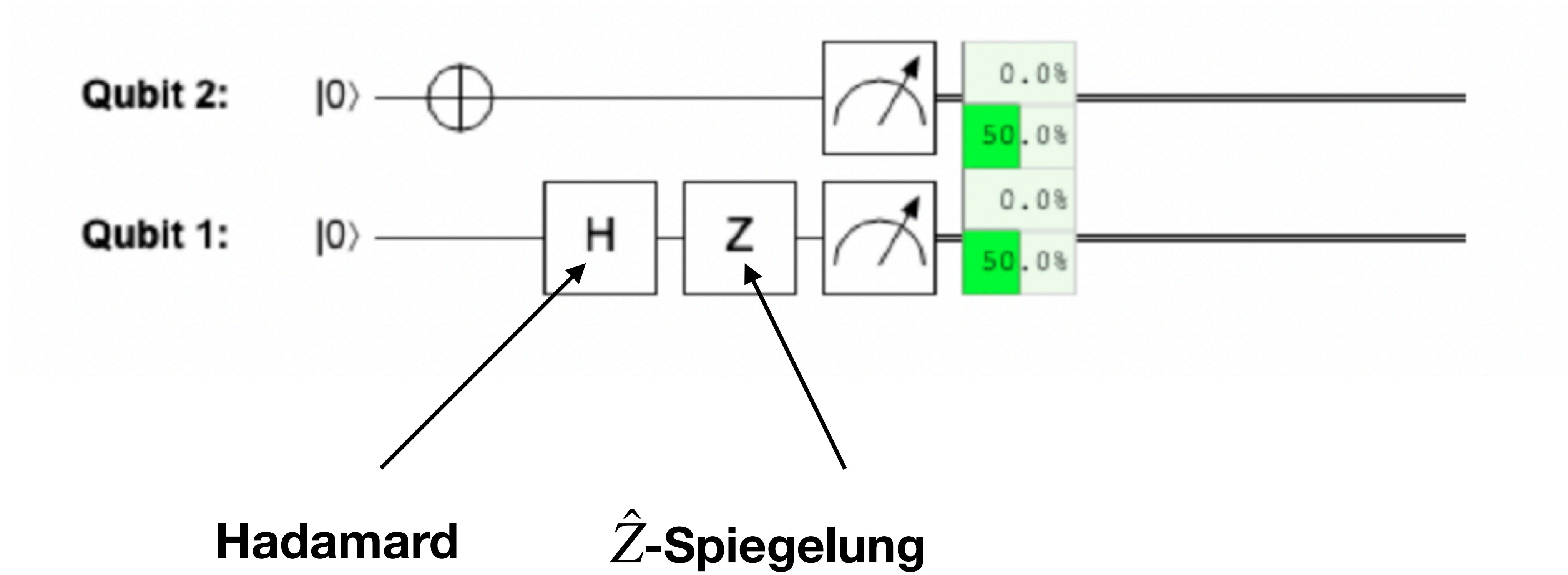
3.2.2 Lokale Operationen



Hadamard

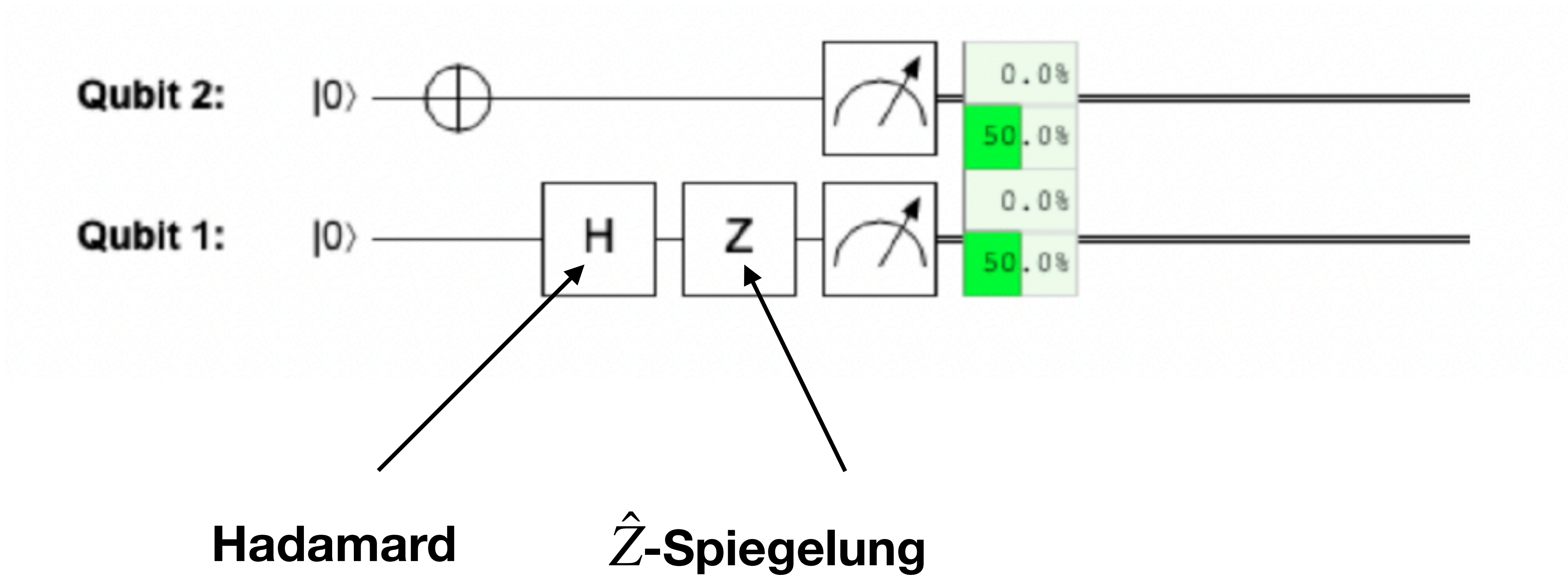
$\hat{Z}$**-Spiegelung**

3.2.2 Lokale Operationen



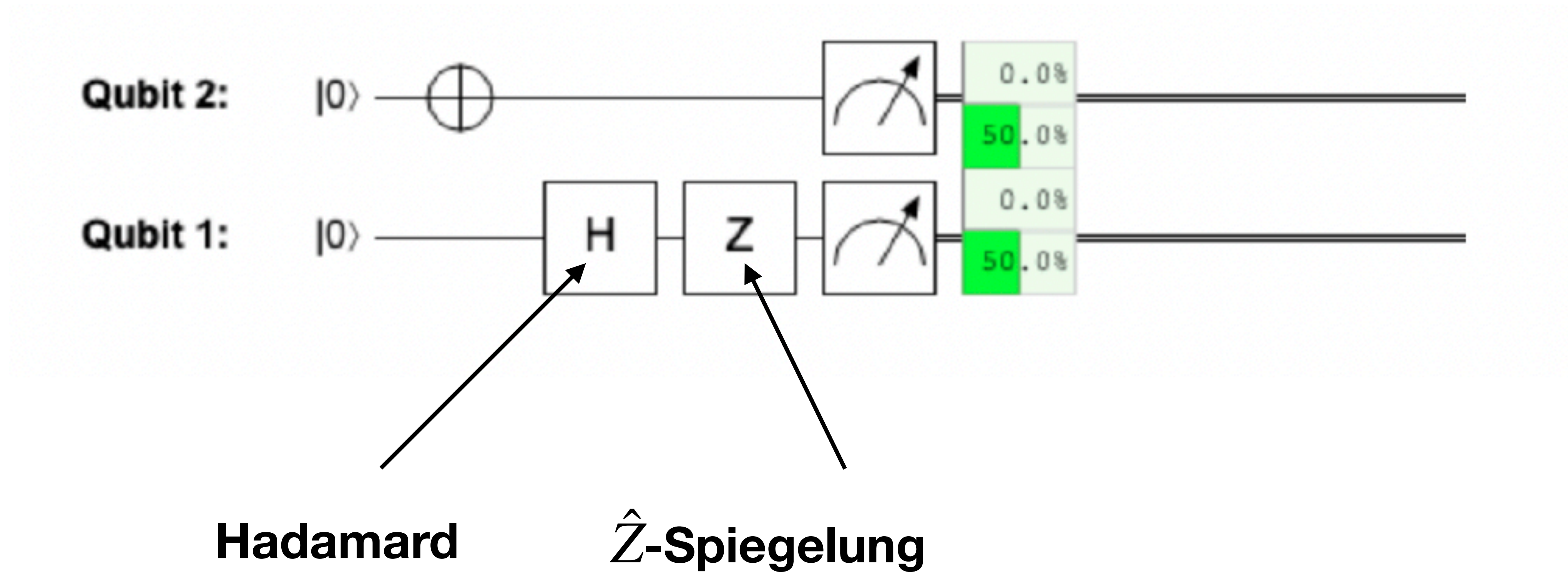
$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_2 \,|\, 00\rangle$$

3.2.2 Lokale Operationen



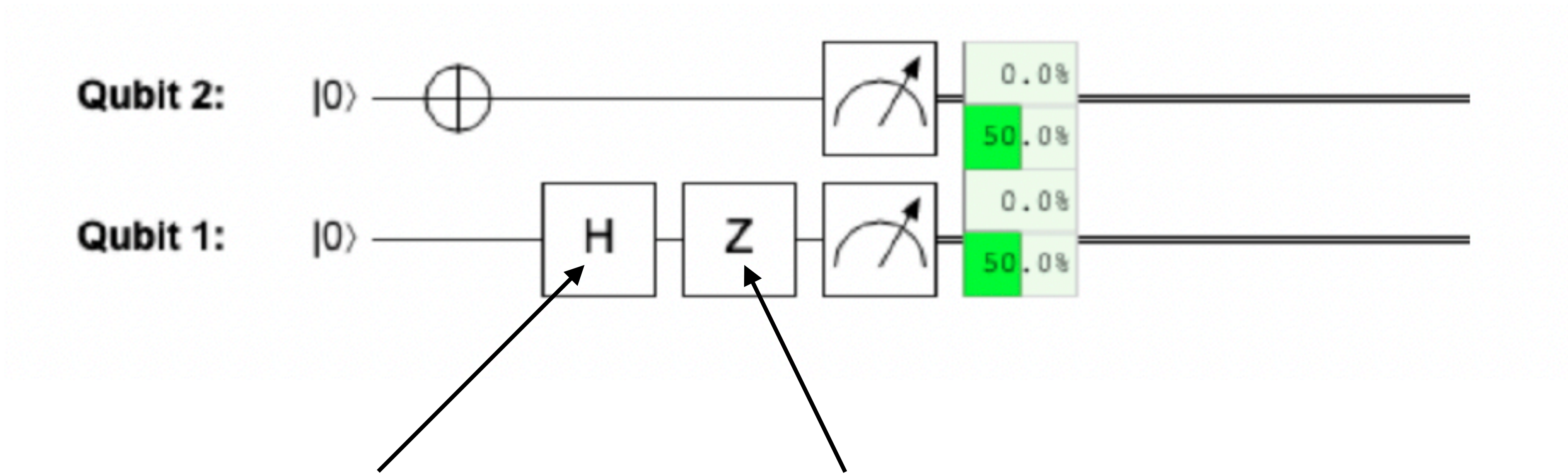
$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \hat{\mathbf{NOT}}_2 \,|00\rangle = \hat{Z}_1 \hat{H}_1 \,|01\rangle$$

3.2.2 Lokale Operationen



$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_2 \, |00\rangle = \hat{Z}_1 \hat{H}_1 \, |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Z}_1 \left(|01\rangle + |11\rangle \right)$$

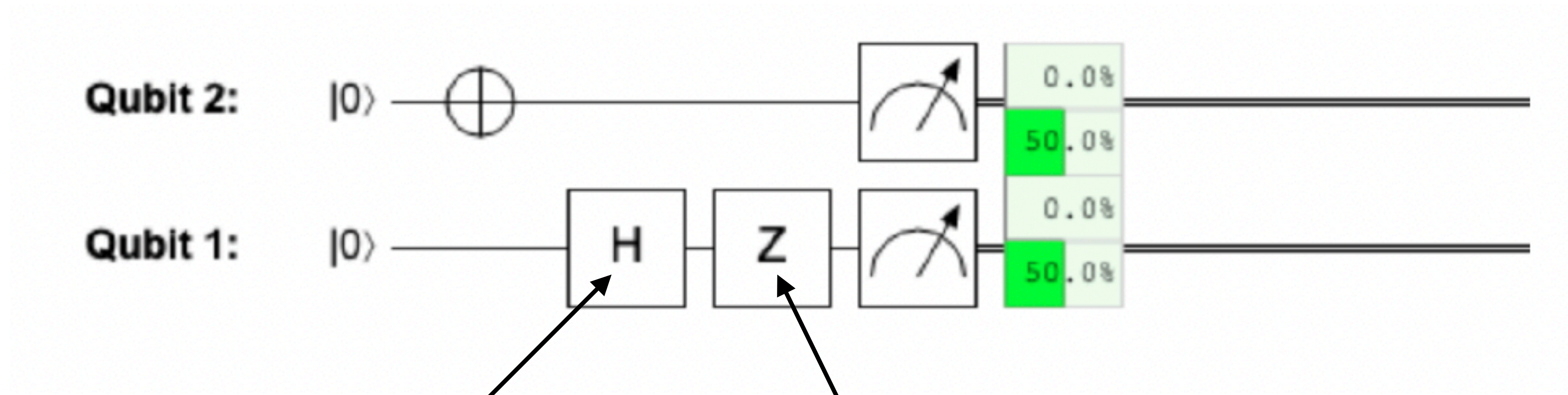
3.2.2 Lokale Operationen



Hadamard $\hat{Z}$**-Spiegelung**

$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \hat{\mathbf{NOT}}_2 |00\rangle = \hat{Z}_1 \hat{H}_1 |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Z}_1 \left(|01\rangle + |11\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle - |11\rangle \right)$$

3.2.2 Lokale Operationen



Hadamard $\hat{Z}$**-Spiegelung**

$$\hat{Z}_1 \hat{H}_1 \mathbf{N\hat{O}T}_2 |00\rangle = \hat{Z}_1 \hat{H}_1 |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Z}_1 \left(|01\rangle + |11\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle - |11\rangle \right)$$

50% **50%**

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken ,

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$

Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1 V_2 |a,b\rangle = U_1 (|a\rangle \otimes V|b\rangle) = U|a\rangle \otimes V|b\rangle = V_2 (U|a\rangle \otimes |b\rangle) = V_2 U_1 |a,b\rangle ,$$

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1V_2\,|a,b\rangle = U_1\left(|a\rangle \otimes V\,|b\rangle\right) = U\,|a\rangle \otimes V\,|b\rangle = V_2\left(U\,|a\rangle \otimes |b\rangle\right) = V_2U_1\,|a,b\rangle\,,$$

Nutze Linearität bei beliebigem Zustand

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1 V_2 |a, b\rangle = U_1 (|a\rangle \otimes V |b\rangle) = U |a\rangle \otimes V |b\rangle = V_2 (U |a\rangle \otimes |b\rangle) = V_2 U_1 |a, b\rangle ,$$

Nutze Linearität bei beliebigem Zustand

In diesem Fall können wir die 2 Operationen parallel ausführen und wir führen eine neue Notation ein:

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1 V_2 |a, b\rangle = U_1 (|a\rangle \otimes V |b\rangle) = U |a\rangle \otimes V |b\rangle = V_2 (U |a\rangle \otimes |b\rangle) = V_2 U_1 |a, b\rangle ,$$

Nutze Linearität bei beliebigem Zustand

In diesem Fall können wir die 2 Operationen parallel ausführen und wir führen eine neue Notation ein:

$$\left(\hat{U} \otimes \hat{V}\right)\left(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\right) = \left(\hat{U}|\alpha\rangle\right) \otimes \left(|\hat{V}\beta\rangle\right)$$

3.2.3 Parallele Operationen

Betrachte Beliebige Operationen $\hat{U}$ und $\hat{V}$
Wenn diese auf unterschiedliche QuBits wirken , dann gilt $\hat{U}_1\hat{V}_2 = \hat{V}_2\hat{U}_1$

Beweis: Betrachte Wirkung auf Basiszustände

$$U_1V_2\,|a,b\rangle = U_1\left(|a\rangle \otimes V\,|b\rangle\right) = U\,|a\rangle \otimes V\,|b\rangle = V_2\left(U\,|a\rangle \otimes |b\rangle\right) = V_2U_1\,|a,b\rangle\,,$$

Nutze Linearität bei beliebigem Zustand

In diesem Fall können wir die 2 Operationen parallel ausführen
und wir führen eine neue Notation ein:

$$\left(\hat{U} \otimes \hat{V}\right)\left(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\right) = \left(\hat{U}|\alpha\rangle\right) \otimes \left(|\hat{V}\beta\rangle\right)$$

$\hat{U} \otimes \hat{V}$ nennt man das Tensorprodukt von 2 Quantenoperationen
oder eine <u>Paralleloperation.</u>

3.2.3 Parallele Operationen

Beispiel: $\hat{H} \otimes \hat{H}$

$$
\begin{aligned}
(H \otimes H)\,|00\rangle &= (H\,|0\rangle) \otimes (H\,|0\rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}\,|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle \otimes |1\rangle \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).
\end{aligned}
$$

Uniforme Superposition

Test: