Vorlesung: Das theoretische Minimum

Mittwochsakademie

angelehnt an

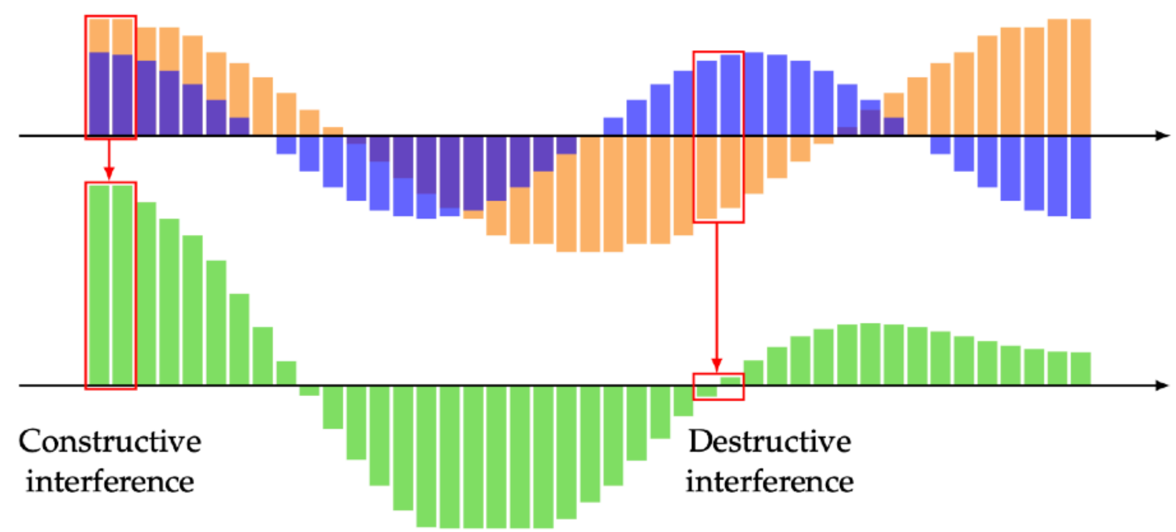
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter

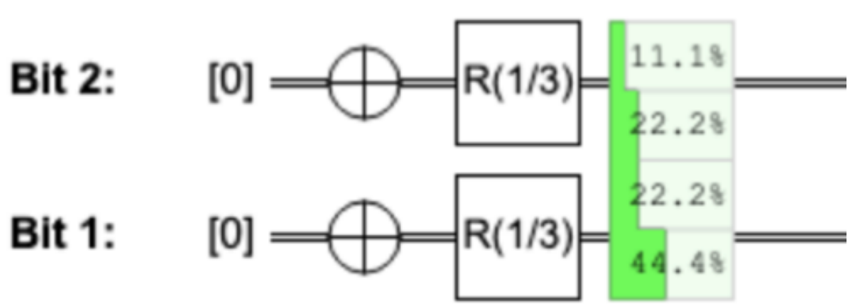
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q4a Quantenkompositionen 1
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
28. 1.: Q5a Virtuose Algorithmen 1
4. 2.: Q5b Virtuose Algorithmen 2





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Wdh.: 2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, der nach oben oder nach unten oder nach einer Kombination (Superposition) aus oben oder unten zeigen kann!

$$[0], [1], \frac{1}{\sqrt{2}}[0] + \frac{1}{\sqrt{2}}[1], \ldots..$$

Dieses QuantenBit - QuBit ähnelt einem probabilistischem Bit - es gibt aber auch Unterschiede

Wir diskutieren hier nur was man damit machen kann, nicht:

Was ist der Hintergrund (Quantenmechanik)?

Wie baut man sowas?

Wdh.: 2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

Der allgemeine Zustand eines QuBits $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) dieser beiden Zustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$$

Vergleiche das probabilistische Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ wurden durch die Amplituden $\psi_{0,1}$ ersetzt

Die Basiszustände $[0]$, $[1]$ durch $|0\rangle$, $|1\rangle$

Wdh.: 2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ gilt

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ gilt

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **und somit** $\psi_{0,1} \in [-1,1]$ **(können negativ sein)**

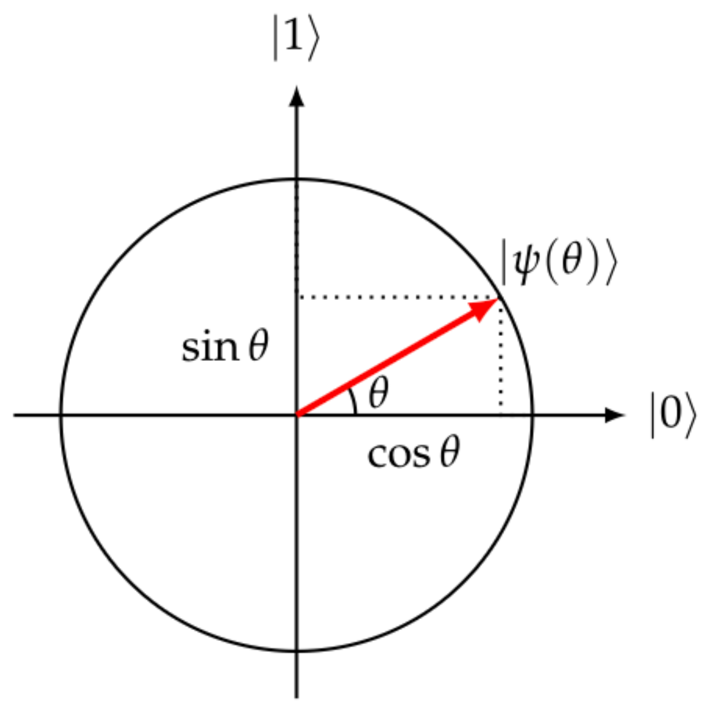
Die QuBitzustände $|0\rangle, |1\rangle$ können auch durch Vektoren dargestellt werden

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: 2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**



Damit können wir die Amplituden wie folgt parametrisieren

$$\psi_0 = \cos\theta\,, \psi_1 = \sin\theta$$

Ein allgemeiner Zustand lautet dann

$$|\,\psi(\theta)\rangle = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt

$$|\,\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |\,\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: 2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

Die möglichen Zustände eines QuBits liegen auf einem Kreis, während die möglichen zustände eines probabilistischen Bits auf einer Geraden liegen

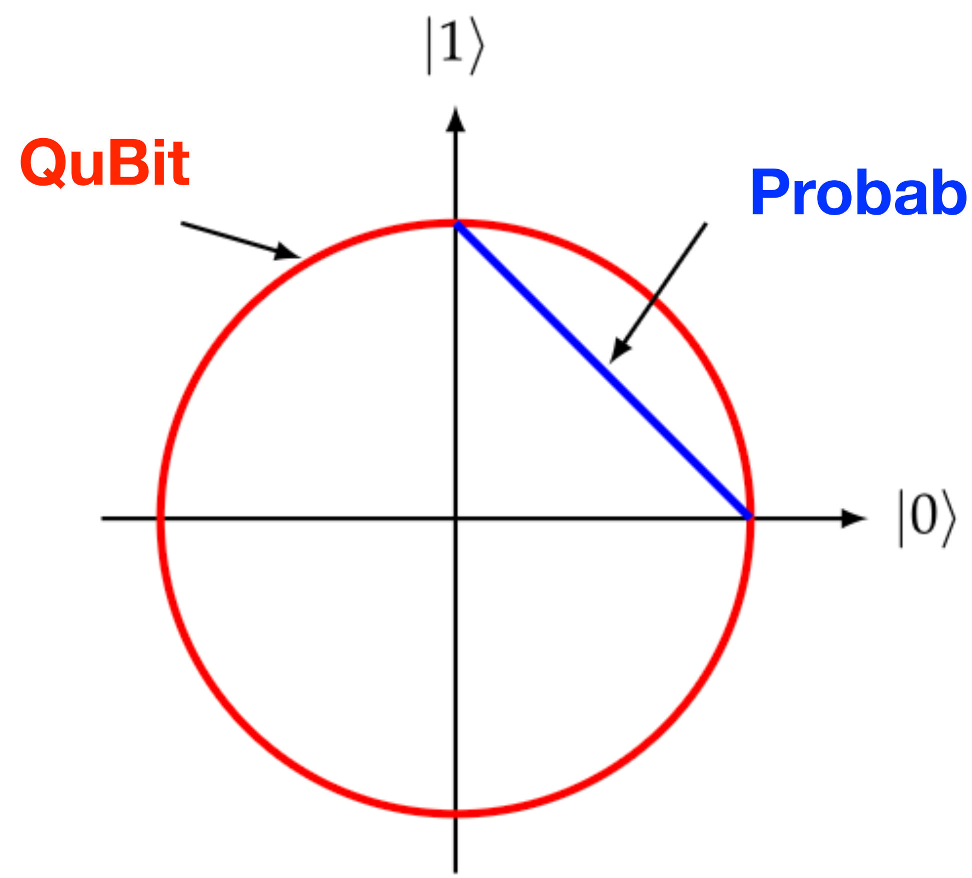


Abbildung 2.2: Der Zustandsraum eines probabilistischen Bits (blau) sowie eines Qubits (rot).

Übungsaufgabe 2.1 (Zustände auf dem Kreis)**.**

Betrachte folgende zwei Zustände eines Qubits:

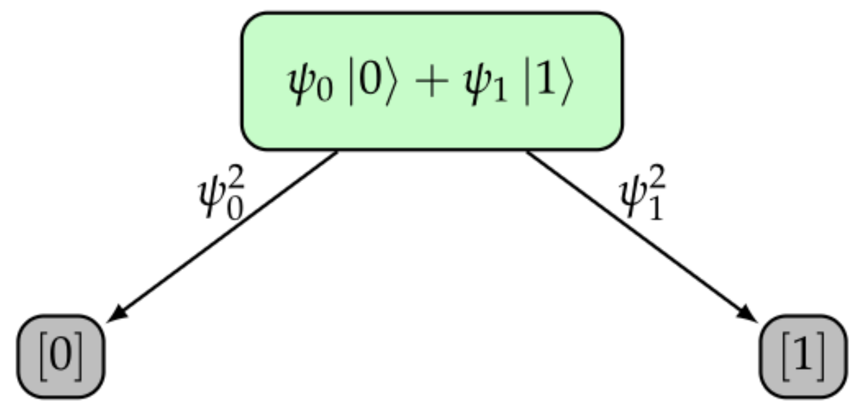
$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Wo liegen diese Zustände auf dem Einheitskreis? Welchem Winkel θ entsprechen sie jeweils?

Wdh.: 2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

<u>Born-Regel:</u>
Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.



Nach der Messung ist der ursprüngliche Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$ verschwunden und es gibt nur noch $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

Weitere Messungen an diesem System liefern keine zusätzlichen Informationen mehr

Wdh.: 2.2 Ein Qubit messen

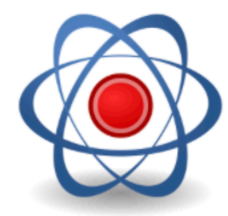
Weiterer Unterschied zum probabilistischen Bit:

Das probabilistische Bits befindet sicher immer definitiv in einem der Zustände, das QuBit nicht!

Das Ergebnis beim Münzwurf könnte prinzipiell vorhersagt werden, das Ergebnis bei der Messung eines QuBits kann prinzipiell nicht vorhergesagt werden - hier gibt es intrinsisch Zufall

Wdh.: 2.2 Ein Qubit messen

Hausaufgabe 2.1 (Ein zufälligen Bit auf Quantenbasis erzeugen).



Das Problem: Der Akku von Alice' Eselsroboter ist schon wieder fast leer und muss den Weg zu einer Ladestation finden. Blöderweise hat Eve es geschafft, den Zufallszahlengenerator des Esels zu hacken. Aber da Eve damit auf einem Hackerforum angegeben hat, weiß auch Alice davon. Um deren bösen Plan aufzuhalten, hat Alice einen Mini-Quantencomputer mit einem Qubit im Roboter verbaut. Sie will die fundamentale Unvorhersehbarkeit einer Quantenmessung nutzen, um Zufallsbits zu generieren, die Eve nicht vorhersehen kann.

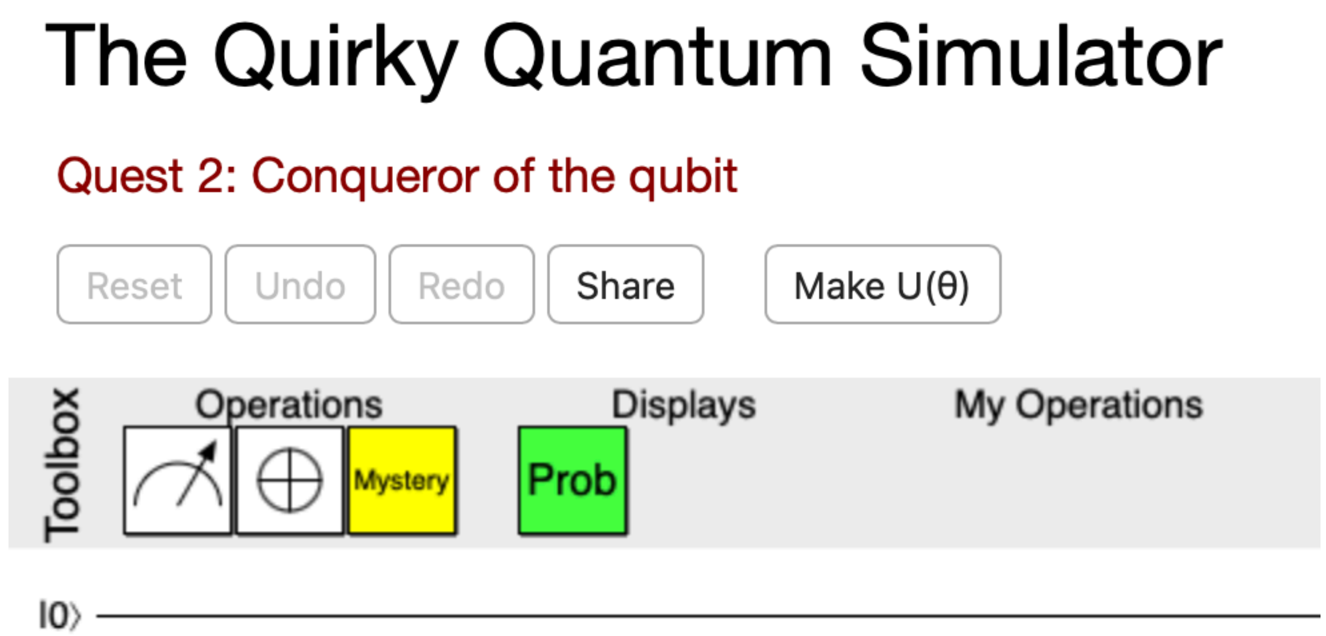
$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle = \cos\theta |0\rangle + \sin\theta |1\rangle$$

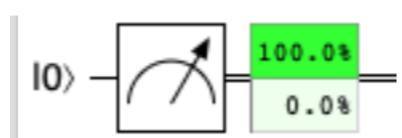
Fragen: Alice kann das Qubit in jeden Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ versetzen und will ein zufälliges Bit generieren, indem sie das Qubit misst.

$$|\psi_0|^2 = \cos^2\theta$$

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie das Ergebnis 0 beim messen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ergebnis 1? $|\psi_1|^2 = \sin^2\theta$
2. Alice will den Winkel θ so einstellen, dass beide Wahrscheinlichkeiten $1/2$ sind. Welchen Winkel θ sollte sie wählen? (Es könnte mehrere Lösungen geben!) $\theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \ldots$

Wdh.: 2.3 Qubits mit QUIRKY simulieren



- **Draht (Einzellinie) entspricht nun einem QuBit mit Startzustand** $|0\rangle$
- **Eine Messung wird mit** 

bezeichnet. Nach der Messung gibt es eine Doppellinie (klassisches Bit).

Wdh.: 2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

In Vektornotation lautet dies

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quantenmechanik: **jede lineare Operation ist eine erlaubt QuBit Operation, solange sie den QuBit-Raum (Kreis) auf sich selbst abbildet (wieder auf Kreis).**

Für die NOT-Operation folgt:

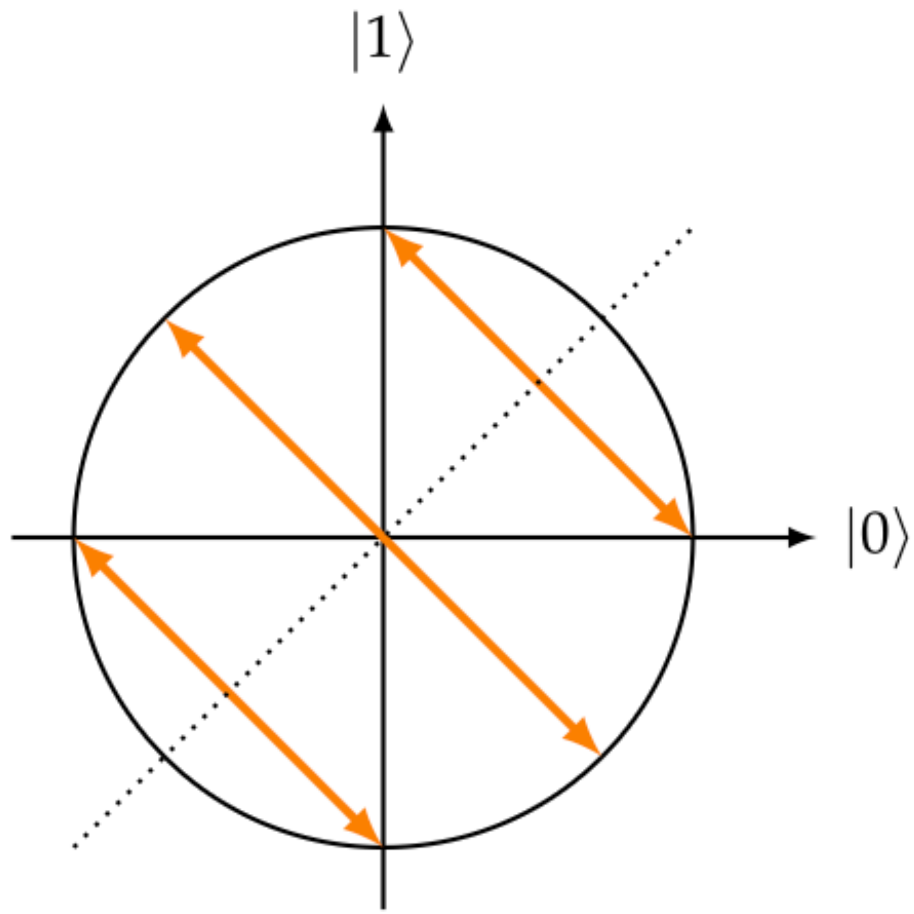
$$\textbf{NOT}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\textbf{NOT}\,|\,0\rangle + \psi_1\textbf{NOT}\,|\,1\rangle = \psi_0\,|\,1\rangle + \psi_1\,|\,0\rangle$$

oder

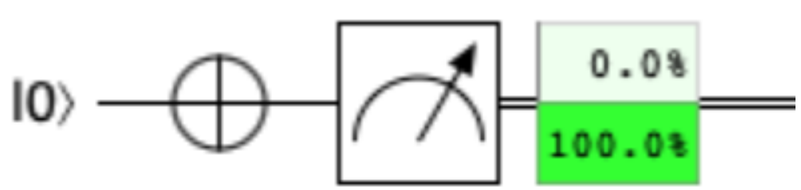
$$\textbf{NOT}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix}$$

Wdh.: 2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: Spiegelung an der Winkelhalbierenden



Quirky:



Wdh.: 2.4 Operationen auf einem Qubit

Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse: Z-Operation

$$Z\,|0\rangle = |0\rangle, \qquad Z\,|1\rangle = -\,|1\rangle,$$

Linearität:

$$Z\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_0\\ -\psi_1\end{pmatrix},$$

Hausaufgabe 2.2 (Die Z-Operation)**.**

Betrachte folgende zwei Qubit Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

1. Berechne $Z\,|+\rangle$ und $Z\,|-\rangle$. $\hat{Z}|+\rangle = |-\rangle \quad \hat{Z}|-\rangle = |+\rangle$
2. Stelle die Z-Operation grafisch auf dem Einheitskreis dar, wie in Abb. 2.4.

Spiegelung um |0> Achse

Übungsaufgabe 2.2 (Linearität genügt nicht)**.**

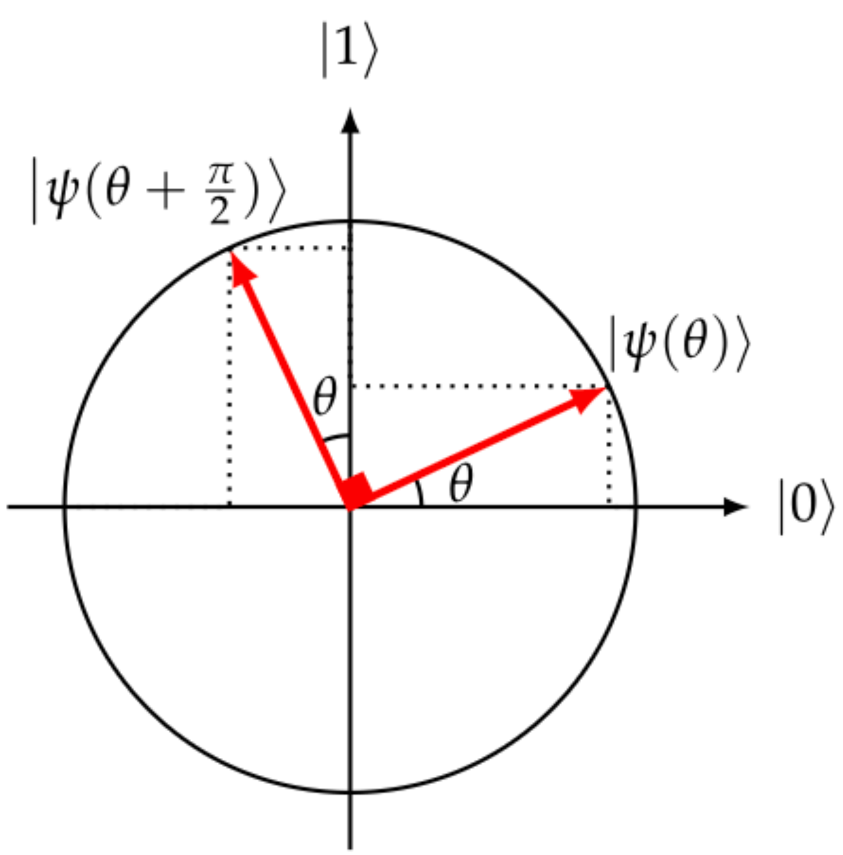
Betrachte die MAD-Operation, indem du $\mathrm{MAD}\,|0\rangle = |0\rangle$ und $\mathrm{MAD}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ durch Linearität erweiterst. Suche einen Qubit Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\mathrm{MAD}\,|\psi\rangle$ kein gültiger Qubit-Zustand ist. Zeige also, dass MAD keine gültige Operation auf Qubits ist!

$$\hat{\mathrm{MAD}}(1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)) = 1/\sqrt{2}|0\rangle + 1/\sqrt{2}(1/\sqrt{2}|0\rangle + |1\rangle) = (1+\sqrt{2})/\sqrt{2}|0\rangle + 1/\sqrt{2}|1\rangle$$

Wdh.: 2.4.1 Rotationen

Eine naheliegende Operation ist eine Drehung $\hat{U}(\theta)$ um den Winkel θ um den Ursprung

$$U(\theta)\,|0\rangle = |\psi(\theta)\rangle, \qquad U(\theta)\,|1\rangle = \left|\psi(\theta + \tfrac{\pi}{2})\right\rangle.$$



Darstellung als 2x2 Matrix

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

In Vektornotation:

$$U(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad U(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\theta.$$

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$

Wdh.: 2.4.1 Rotationen

Übungsaufgabe 2.3 (Qubit-Rotationen).

1. Berechne $U(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\end{pmatrix}$ mit Gl. 2.8 und 2.27.

$$\hat{U}\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\,\psi_0 - \sin\alpha\,\psi_1\\\sin\alpha\,\psi_0 + \cos\alpha\,\psi_1\end{pmatrix}$$

2. Nutze die Definition von $|\psi(\theta)\rangle$ aus Gl. 2.5 um zu prüfen, dass für alle Winkel α und β folgendes gilt:

$$U(\alpha)\,|\psi(\beta)\rangle = |\psi(\alpha+\beta)\rangle. \tag{2.29}$$

$$\hat{U}\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass $U(\theta)$ eine Rotation auf beliebigen Qubit-Zuständen entspricht.

Hinweis: Die trigonometrischen Regeln für Winkelsummen und -differenzen könnten hilfreich sein:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{2.30}$$

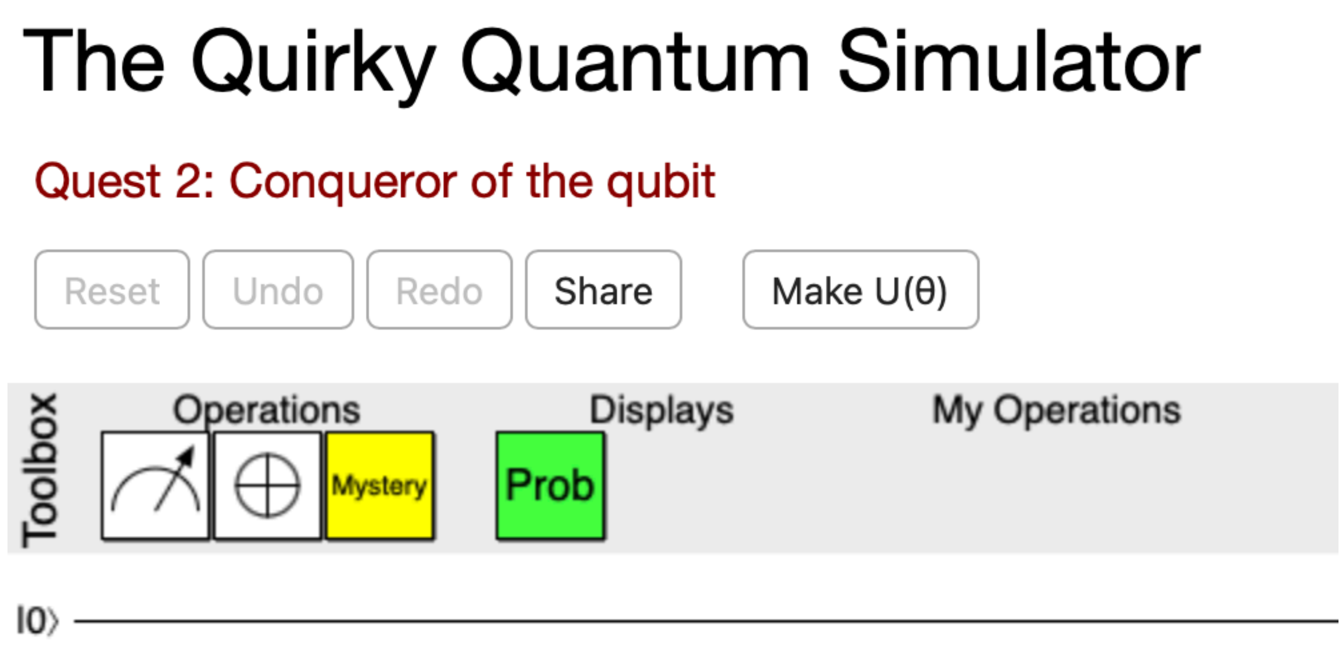
Beachte Rotation um 90 Grad ist keine Spiegelung

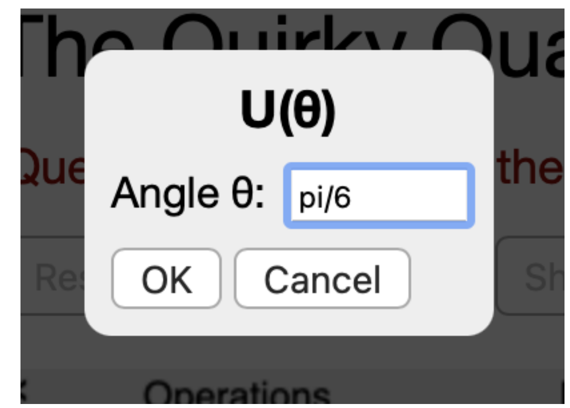
$$\text{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle \qquad \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle = |1\rangle$$

$$\text{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle \qquad \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle = -\,|0\rangle$$

Wdh.: 2.4.1 Rotationen

Quirky:





Test:

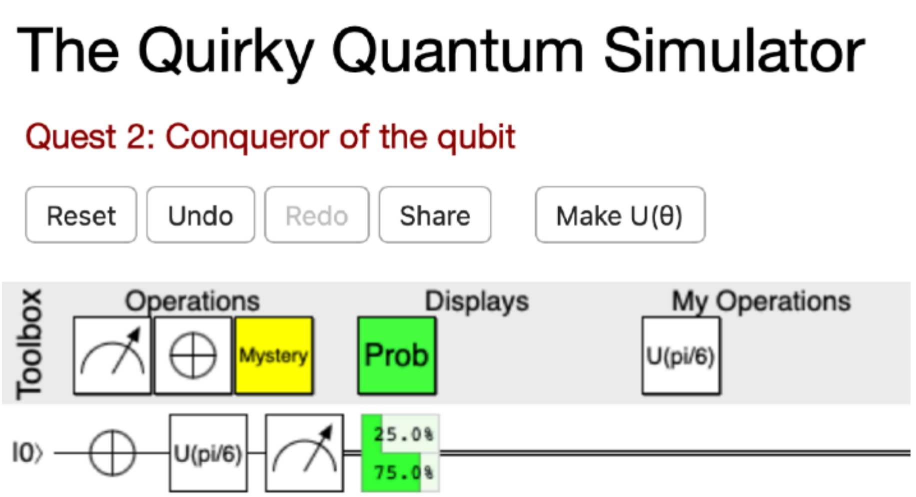
$$|\psi(\pi/6)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 25\%,$$

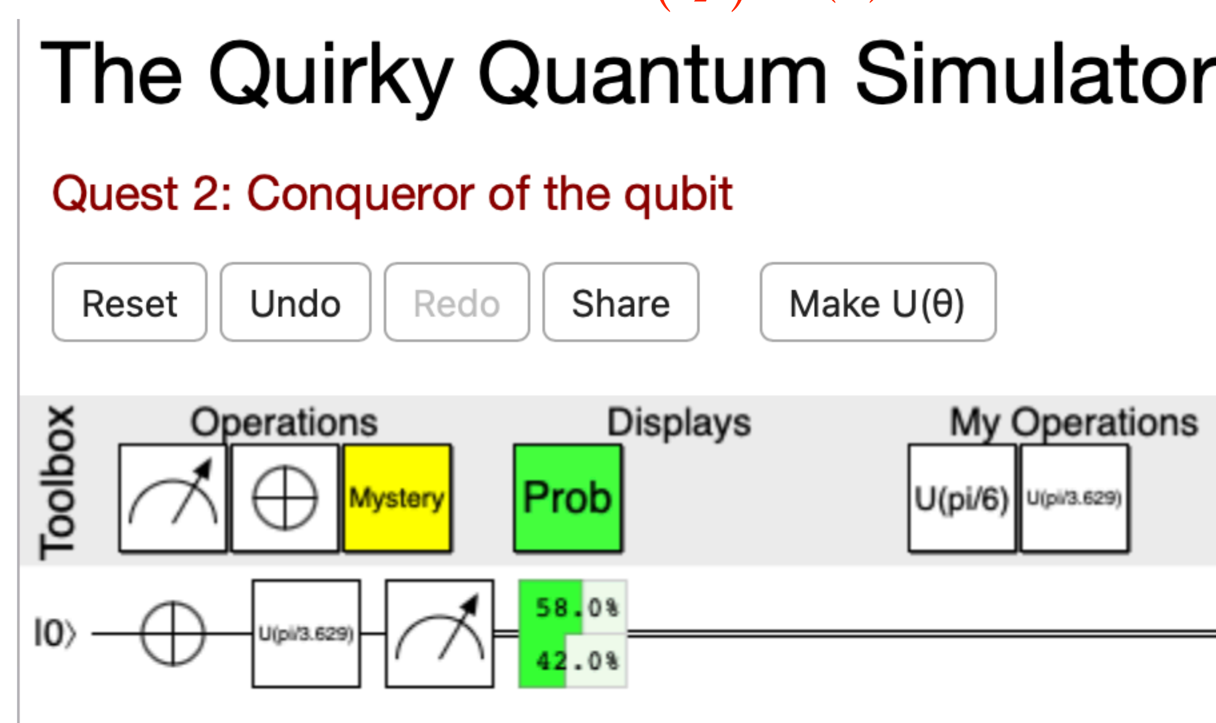
Wdh.: 2.4.1 Rotationen

Hausaufgabe 2.3 (Die 30°-Rotation testen).

1. Baue folgende Abfolge von Operationen in Quirky: Bereite zunächst den Zustand $|1\rangle$ vor, rotiere dann um den Winkel $\pi/6$ und messe schlussendlich das Qubit.
2. Nutze Quirky's Wahrscheinlichkeitenanzeige um die Ergebnisse der Messung anzuzeigen. Zeige, dass die Ausgabe von Quirky korrekt ist.
3. Verändere deinen Schaltkreis so, dass man mit Wahrscheinlichkeit 42% das Messergebnis 1 erhält.



$$\hat{U}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$



$$\cos^2\theta = 0.42 \Rightarrow \cos\theta = 0.648074 \Rightarrow \theta = 0.865743 = \pi/(3.629)$$

Wdh.: 2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}|\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}|0\rangle + \psi_1\hat{M}|1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}|0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}|1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}|0\rangle = |0\rangle$ und $\hat{1}|1\rangle = |1\rangle$

$$(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$$

Beispiele:

NOT^{-1} = NOT $\qquad \hat{R}(\theta)^{-1} = \hat{R}(-\theta)$

$$NM(NM)^{-1} = NMM^{-1}N^{-1}$$

Übungsaufgabe 2.5 (Das Inverse einer zusammengesetzten Operation).

Zeige dass NM invertierbar ist, wenn M und N invertierbar sind. Beschreibe das Inverse der zusammengesetzten Operation $(NM)^{-1}$ durch die einzelnen Inverse N^{-1} und M^{-1}.

Wdh.: 2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Alle Operationen auf QuBits sind invertierbar und damit reversibel

Bei probabilistischen Bits war das nicht der Fall -

vergleiche: probabilistischer Flip: $\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$

Wdh.: 2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)

Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ und NOT

Hausaufgabe 2.4 (Z aus NOT).

Seien Z, NOT und $U(\theta)$ die Qubit-Operationen definiert in Gl. 2.26, 2.25 und 2.27.

1. Finde einen Winkel θ, für den $Z = U(\theta)\,\mathrm{NOT}\,U(-\theta)$ gilt.
2. Finde einen Winkel θ, für den $Z = \mathrm{NOT}\,U(\theta)$ gilt.

Kannst du die Abfolge der Transformationen auf dem Einheitskreis visualiseren?

Hinweis: Schau dir Abb. 2.4 und die Zeichnung, die du für die 2.2 erstellt hast an.

$$\hat{U}(\theta)\mathrm{NOT}\hat{U}(-\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\\ cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\theta = \pi/4 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \theta = -\pi/4 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{NOT}\hat{U}(-\theta) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Man findet: die allgemeinste Spiegelung (Reflektion) $\hat{V}(\theta)$ hat die Form:

$\hat{V}(\theta) =$ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

Wdh.: 2.4.3 Spiegelungen

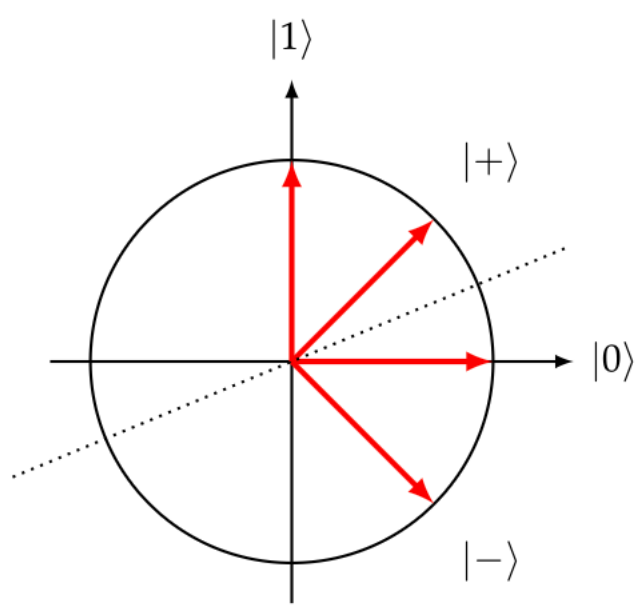
Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$ (Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\,\hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

$$\hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) =: |+\rangle$$

$$\hat{H}\,|\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\big) =: |-\rangle$$



Spiegelung an der Achse

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$

Wdh.: 2.5 Quantenzustände unterscheiden

Alice schaut einem Wettbewerb mit Eselrobotern zu:
Notiz: 1 wenn Lieblingsroboter gewinnt, 0 wenn nicht

Oder Kodierung dieser Information in einem QuBit
QuBit in Zustand $|\psi(\theta_1)\rangle$ wenn Lieblingsroboter gewinnt, sonst $|\psi(\theta_0)\rangle$
Sie wendet dazu entweder $\hat{U}(\theta_0)$ oder $\hat{U}(\theta_1)$ auf $|0\rangle$ an.

Dann gibt Alice dieses QuBit an Bob
Kann Bob nur anhand des QuBits raten, welchen Bitwert (0 oder 1) Alice kodiert hat?
Wäre es besser, wenn Bob vorher eine Rotation/Spiegelung auf das QuBit anwenden kann?

Übungsaufgabe 2.6 (Plus und Minus)**.**

Stell dir vor, jemand gibt dir ein Qubit in einem der folgenden Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Du willst erraten, in welchem der beiden Zustände es sich befindet. Du darfst eine Rotation anwenden und danach messen. Um welchen Winkel solltest du rotieren und mit welcher Wahrscheinlichkeit rätst du korrekt?

Wdh.: 2.5 Quantenzustände unterscheiden

Übungsaufgabe 2.6 (Plus und Minus)**.**

Stell dir vor, jemand gibt dir ein Qubit in einem der folgenden Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Du willst erraten, in welchem der beiden Zustände es sich befindet. Du darfst eine Rotation anwenden und danach messen. Um welchen Winkel solltest du rotieren und mit welcher Wahrscheinlichkeit rätst du korrekt?

$$\hat{U}\left(-\frac{\pi}{4}\right)|+\rangle = |0\rangle \qquad \hat{U}\left(-\frac{\pi}{4}\right)|-\rangle = -|1\rangle$$

Übungsaufgabe 2.7 (Ununterscheidbare Zustände)**.**

Zeige, dass die beiden Zustände $|\psi(\theta)\rangle$ und $|\psi(\theta+\pi)\rangle = -|\psi(\theta)\rangle$ nicht unterschieden werden können. Also, dass egal welche Qubit-Operationen du anwendest, bevor du misst, die Messergebnisse immer gleich wahrscheinlich sein werden.

Lösung.

Wir haben bereits gesehen, dass jede Kombination M an Rotationen und Spiegelungen linear ist. Damit folgt aus $M|\psi(\theta)\rangle = |\psi(\theta')\rangle = \binom{\cos\theta'}{\sin\theta'}$, dass $M\left(-|\psi(\theta)\rangle\right) = -|\psi(\theta')\rangle = \binom{-\cos\theta'}{-\sin\theta'}$. Nach Gl. 2.6 sind die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der Messergebnisse für beide Zustände gleich.

Wdh.: 2.5 Quantenzustände unterscheiden

Hausaufgabe 2.5 (Zwei Zustände unterscheiden)**.**

Seien θ, θ' zwei Winkel. Nimm der Einfachheit halber an, dass $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$. Angenommen, Eve gibt dir ein einzelnes Qubit, welches sich jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ oder $|\psi(\theta')\rangle$ befindet. (Sie könnte beispielsweise eine faire Münze werfen, um zu entscheiden, in welchem Zustand sich das Qubit befinden soll.) Deine Aufgabe ist es nun, herauszufinden, welchen Zustand das Qubit hat. In ein paar Schritten wirst du die optimale Strategie finden:

1. Wende zunächst die Rotation $U(\phi)$ um einen Winkel ϕ an. Welche zwei möglichen Zustände erhältst du dann?
2. Führe als nächstes eine Quantenmessung durch und interpretiere das Ergebnis wie folgt: Falls das Ergebnis 0 ist, rätst du, dass das Qubit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ war, ansonsten rätst du den Zustand $|\psi(\theta')\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit identifizierst du den Zustand korrekt? Schreibe eine Formel mit den Variablen θ, θ' und ϕ.

   Hinweis: Berechne zunächst die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den ersten Zustand bekommen. Dann die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den zweiten Zustand bekommen. Und dann erinnere dich daran, dass beide mit Wahrscheinlichkeit 50% auftreten.
3. Du kannst den Rotationswinkel ϕ immer noch clever wählen. Was ist die Erfolgswahrscheinlichkeit als Funktion von θ und θ', wenn du ϕ optimal wählst?

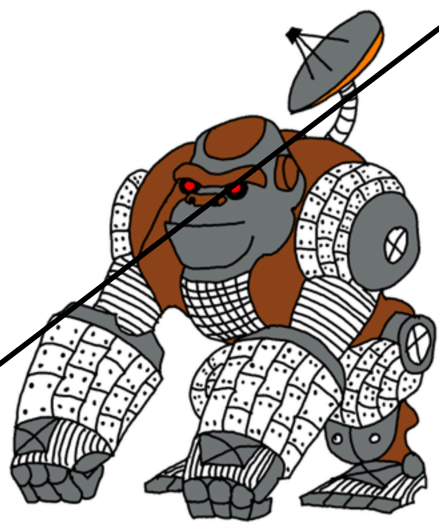
   Hinweis: Versuche die trigonometrischen Identitäten aus Gl. 2.30 zu verwenden. Insbesondere kannst du mit diesen zeigen, dass

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\alpha)\big), \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\alpha)\big). \tag{2.36}$$

   Wenn du nicht mehr weiter weißt, kannst du auch Wolfram Alpha nutzen.

Wdh.: 2.5 Quantenzustände unterscheiden

Übungsaufgabe 2.8 (Arm- und Beinbruch (herausfordernd))**.**



Alice und Bob erkunden gerne die Wildnis rund um ihre Stadt. Dafür haben sie zwei große Gorilla-Roboter gebaut, die das unwegsame Gelände navigieren können und sie dabei bequem auf dem Rücken tragen. Aber heute ist kein guter Tag für Bob, sein Roboter ist von einer Klippe gefallen! Zum Glück überlebt Bob den Sturz mit nur ein paar blauen Flecken, aber dem Roboter geht es nicht so gut: ein Arm, ein Bein und das Kommunikationsmodul sind kaputt gegangen. Bob hat leider keine Ersatzteile für die Arme und Beine mitgebracht, schafft es aber zumindest das Kommunikationsmodul kurzzeitig zu reparieren. Dummerweise kann er nur ein einzelnes Qubit senden, bevor es ganz kaputt geht. Bob würde gerne Alice Bescheid geben, welches Bein (links oder rechts) und welcher Arm (links oder rechts) kaputt ist, damit sie das entsprechende Bauteil von ihrem Roboter zu ihm herunter schicken kann. Sie kann ihm aber nur ein Gliedmaß geben, da beide Roboter noch nach Hause laufen können müssen (sie können zum Glück auf drei Beinen laufen). Die Situation ist aber noch komplizierter, da Alice nicht ihr ganzes Werkzeug mitgebracht hat. Bob weiß, dass sie entweder das Werkzeug zum abmontieren von Beinen oder Armen dabei hat – leider kann er sich nicht daran erinnern welches von beiden!

Es gibt vier mögliche Kombinationen, in denen die Arme und Beine gebrochen sein können – du kannst annehmen dass alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/4$ auftreten. Weiterhin gibt es zwei mögliche Werkzeuge, die Alice dabei haben könnte und du kannst annehmen, dass beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten.

Wdh.: 2.5 Quantenzustände unterscheiden

Fragen:

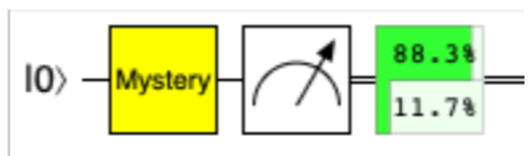
1. Wenn Bob nur ein Bit an Alice senden kann, wie sollte er den Wert auswählen, je nachdem welche der vier Möglichkeiten eingetroffen ist? Wie sollte Alice die Nachricht interpretieren und entscheiden welches Gliedmaß, linkes oder rechtes, sie ihm senden sollte? (Denk daran, dass Alice entweder nur Beine oder nur Arme senden kann und Bob nicht weiß welches von beiden der Fall ist.) Wenn beide die optimale Strategie nutzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit interpretiert Alice die Nachricht richtig und sendet das richtige Körperteil an Bob?
2. Was, wenn Bob stattdessen ein Qubit senden kann? Je nach seiner Situation kann er einen von vier Zuständen wählen und Alice kann abhängig von ihrer Situation eine von zwei Rotationen anwenden, bevor sie das Qubit misst. Was ist ihre gemeinsame beste Strategie und welche Erfolgswahrscheinlichkeit hat sie?

Du kannst annehmen, dass Alice und Bob wissen, wie sie ihre Nachrichten interpretieren müssen, da sie im Voraus darüber gesprochen haben, was sie in dieser Notsituation machen sollten.

Wdh.: 2.5.1 Mysteryoperation 2

Quantentomographie:
Versuche Zustand durch Messungen und Manipulationen zu bestimmen

$$M\,|0\rangle = \begin{pmatrix}\psi_0 \\ \psi_1\end{pmatrix}.$$



$$\psi_1^2 = 0.117 \qquad \psi_2^2 = 0.883$$

Ergebnis: $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%} \\ \sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%} \\ -\sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}$

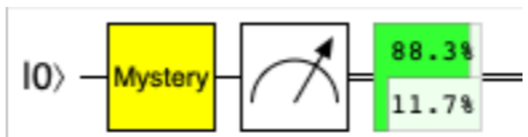
Hausaufgabe 2.6 (Zeit für ein Mysterium)**.**

1. Wie kannst du zwischen den beiden Optionen unterscheiden? Nutze Quirky um den Quantenzustand $M\,|0\rangle$ bis auf allgemeines Vorzeichen festzustellen.
2. Bestimme genauso auch den Quantenzustand $M\,|1\rangle$.
3. *Bonusfrage:* Bestimmen die beiden Antworten die Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für M auf. Falls nicht, wie kannst du M herausfinden?

Wdh.: 2.5.1 Mysteryoperation 2

Quantentomographie:
Versuche Zustand durch Messungen und Manipulationen zu bestimmen

$M|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$



$\psi_1^2 = 0.117 \qquad \psi_2^2 = 0.883$

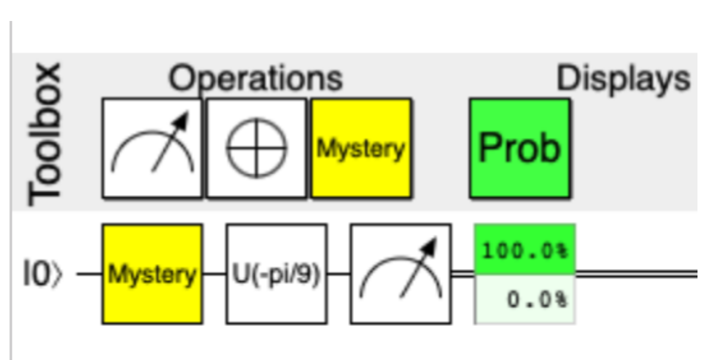
Ergebnis: $\pm\begin{pmatrix} \sqrt{88.3\%} \\ \sqrt{11.7\%} \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} \sqrt{88.3\%} \\ -\sqrt{11.7\%} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \theta = \pm\, 0.3491 = \pm\, \pi/9$

Hausaufgabe 2.6 (Zeit für ein Mysterium).

1. Wie kannst du zwischen den beiden Optionen unterscheiden? Nutze Quirky um den Quantenzustand $M|0\rangle$ bis auf allgemeines Vorzeichen festzustellen.
2. Bestimme genauso auch den Quantenzustand $M|1\rangle$.
3. *Bonusfrage:* Bestimmen die beiden Antworten die Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für M auf. Falls nicht, wie kannst du M herausfinden?

Rotiere um $+\pi/9$

Rotiere um $-\pi/9$



$$\Rightarrow \theta = +\, \pi/9$$

$$\hat{M}|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{9} \\ \sin\frac{\pi}{9} \end{pmatrix}$$

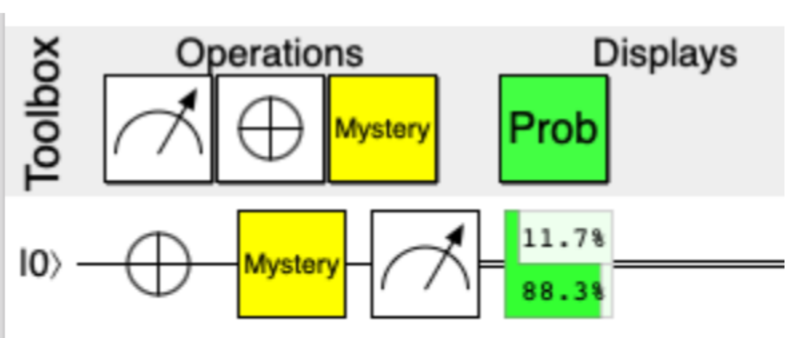
Wdh.: 2.5.1 Mysteryoperation 2

Quantentomographie: Versuche einen Zustand durch Messungen und Manipulationen zu bestimmen

$$\hat{M}\,|\,0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{9} \\ \sin\frac{\pi}{9} \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 2.6 (Zeit für ein Mysterium).

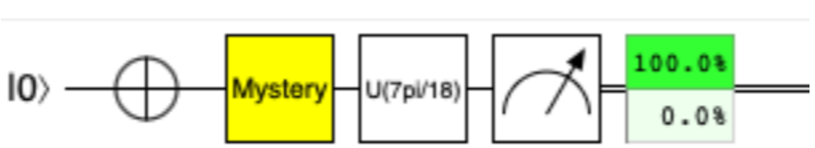
1. Wie kannst du zwischen den beiden Optionen unterscheiden? Nutze Quirky um den Quantenzustand $M\,|0\rangle$ bis auf allgemeines Vorzeichen festzustellen.
2. Bestimme genauso auch den Quantenzustand $M\,|1\rangle$.
3. *Bonusfrage:* Bestimmen die beiden Antworten die Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für M auf. Falls nicht, wie kannst du M herausfinden?



$$\Rightarrow \theta' = \pm\, 1.2217 = \pm\,\frac{7\pi}{18} = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \theta' = -\,\frac{7\pi}{18}$$

Rotiere um $\frac{7\pi}{18}$



$$\hat{M}\,|\,1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{7\pi}{18} \\ -\sin\frac{7\pi}{18} \end{pmatrix}$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{9} & \cos\frac{7\pi}{18} \\ \sin\frac{\pi}{9} & -\sin\frac{7\pi}{18} \end{pmatrix}$$

Quest 3: Verzaubernde Verschränkungen

In den letzten zwei Wochen haben wir darüber gesprochen, wie sich ein einzelnes probabilistisches Bit und ein einzelnes Qubit verhält. Diese Woche wirst du lernen, was passiert, wenn du zwei zur Verfügung hast. Zunächst werden wir lernen, wie sich zwei klassische Bits verhalten, welche Zustände sie haben können und wie sie *korrelieren*. Anschließend werden wir uns analog zwei Qubits anschauen und herausfinden, was es heißt, wenn diese *verschränkt* (engl. *entangled*) sind.

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix}$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix}$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \textbf{ mit } 0 \le p_{ij} \le 1$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

2 Münzen können vier Zustände haben

00 **01** **10** **11**

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \textbf{ mit } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \textbf{ und } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \textbf{ mit } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \textbf{ und } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \text{ **mit** } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ **und** } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

Alternativ schreiben wir diesen Zustand als

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

3.1. 2 Probabilistische Bits

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \textbf{ mit } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \textbf{ und } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

Alternativ schreiben wir diesen Zustand als

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

mit der Identifikation $[00] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [01] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [10] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [11] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

3.1. 2 Probabilistische Bits

Das probabilistische Bit für die 2-Münzenzustände ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot p_0 \\ p_0 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_0 \\ p_1 \cdot p_1 \end{pmatrix} \text{ **mit** } 0 \le p_{ij} \le 1 \text{ **und** } p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

Alternativ schreiben wir diesen Zustand als

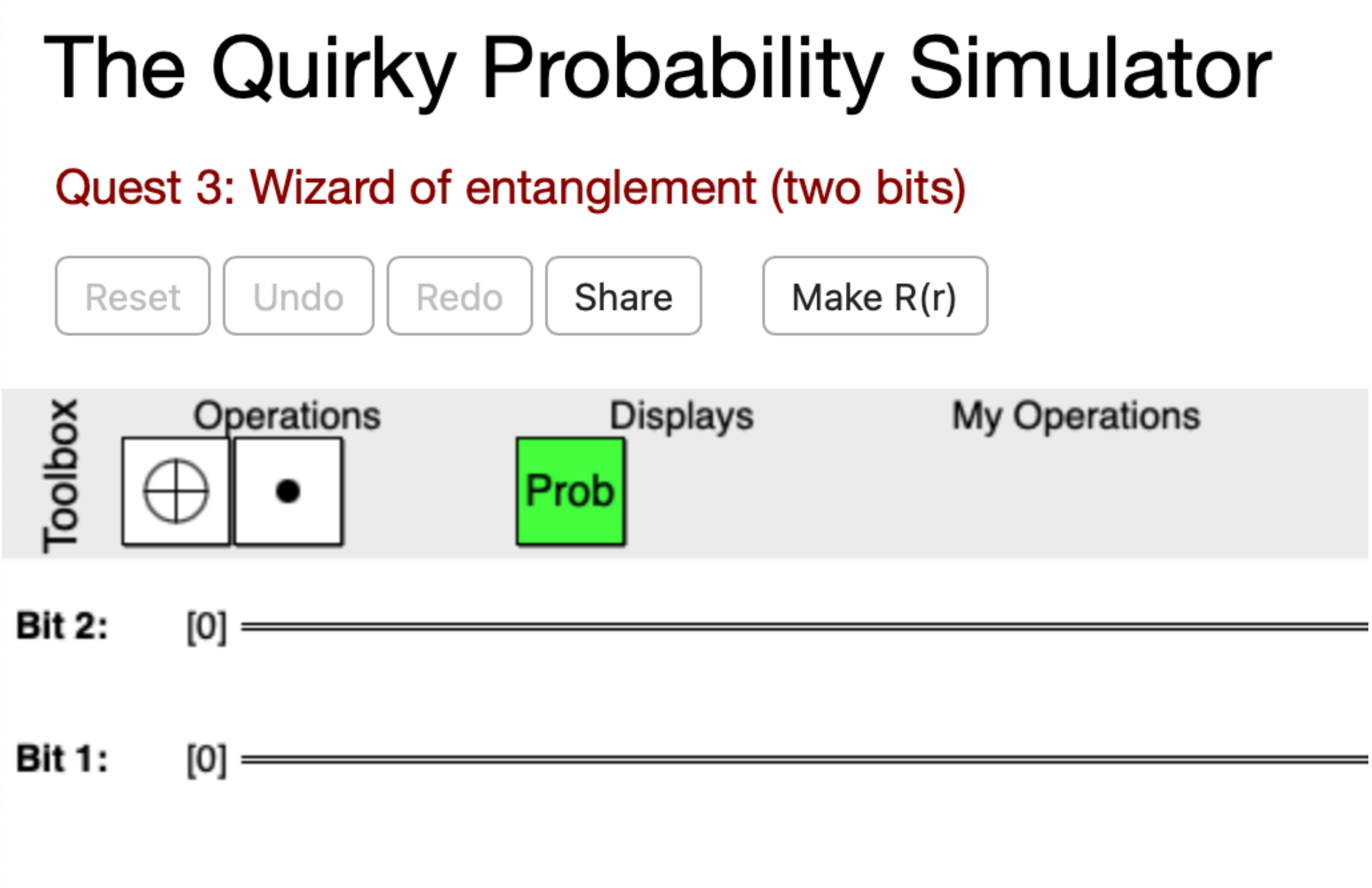
$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

mit der Identifikation $[00] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [01] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [10] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [11] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

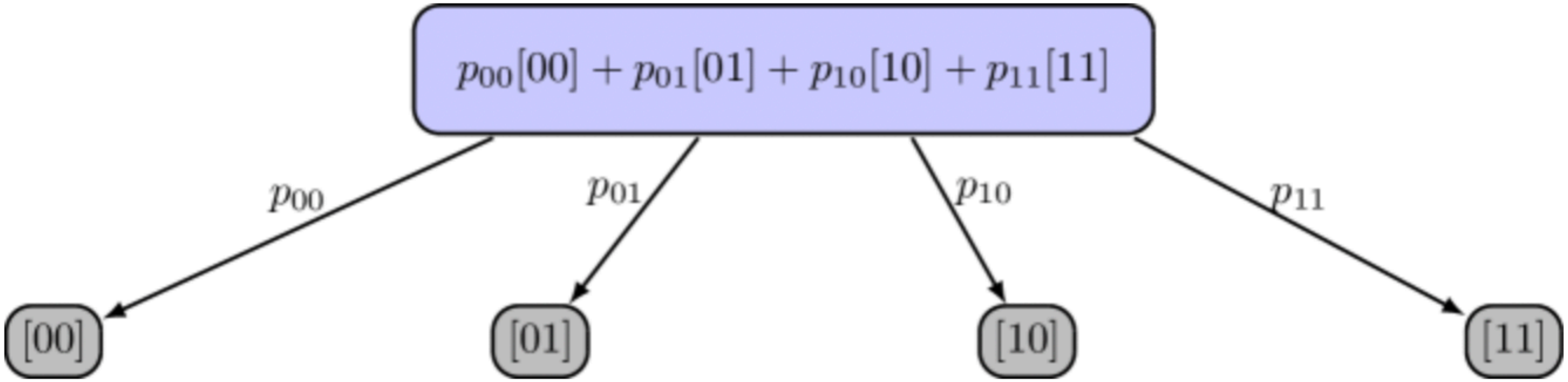
Kompakte Notation $\frac{1}{2}[00] + 0[01] + 0[10] + \frac{1}{2}[11] = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

3.1. 2 Probabilistische Bits

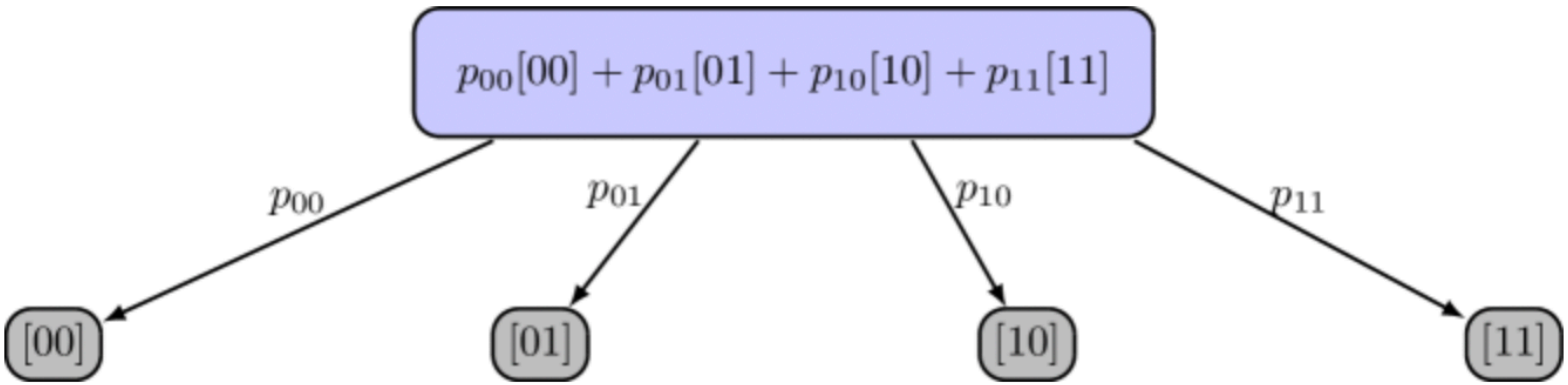
Quirky: Quest 3 -> 2 Bits



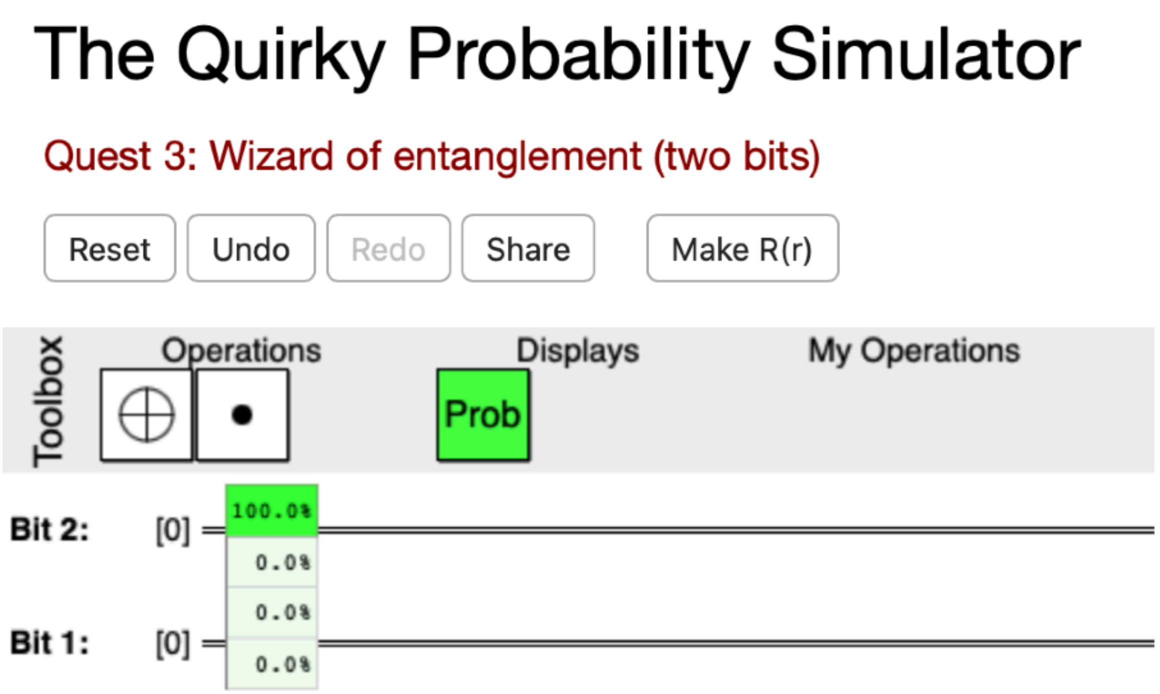
3.1.1 Beide Bits messen



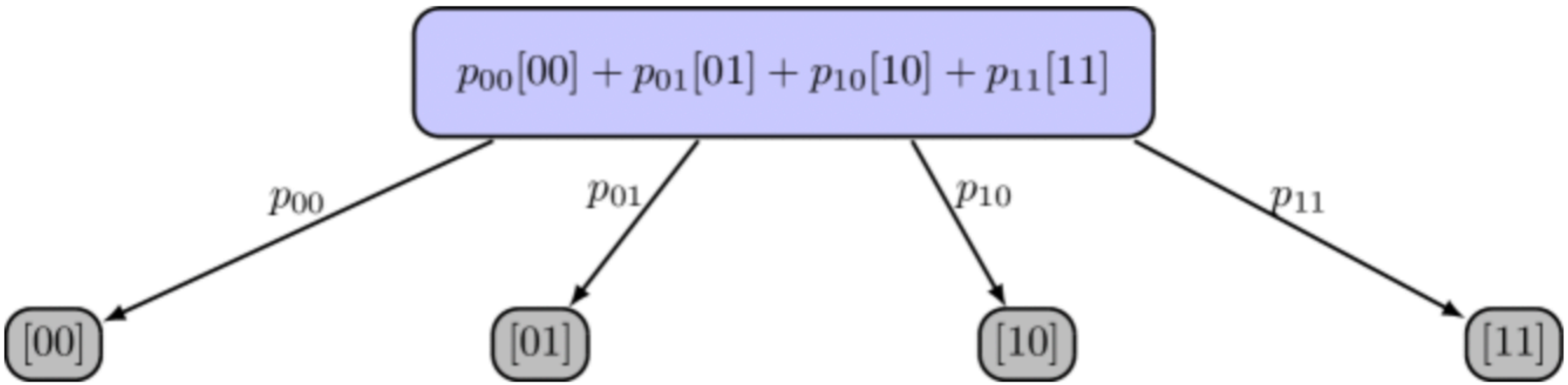
3.1.1 Beide Bits messen



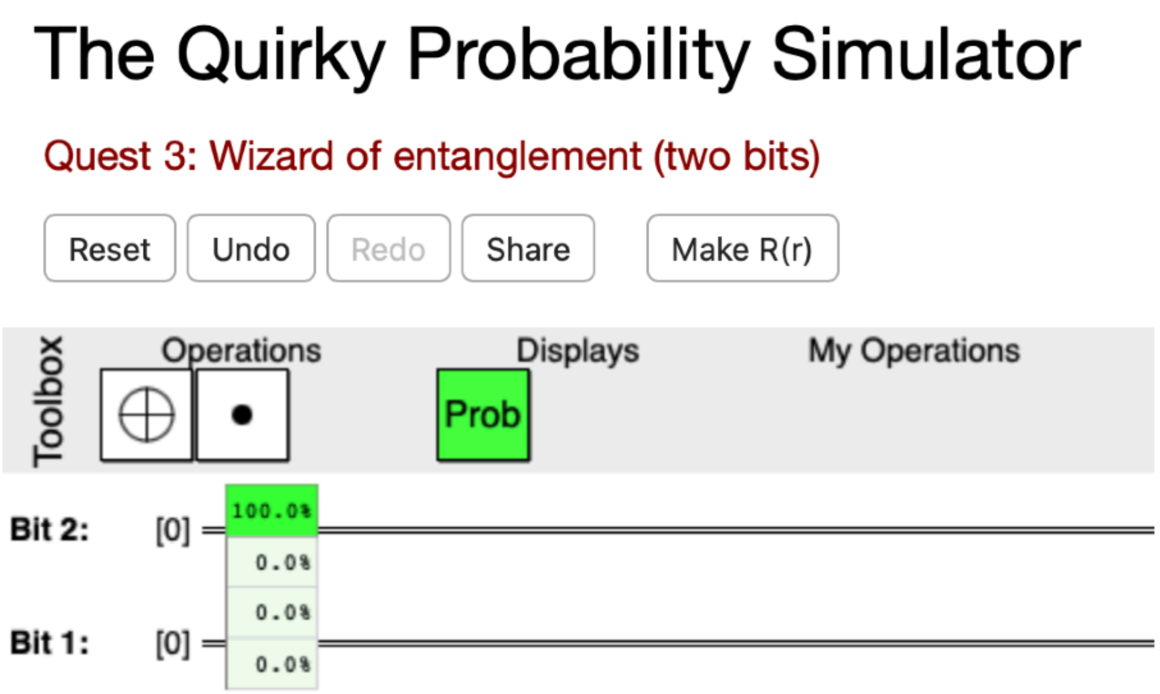
[00]



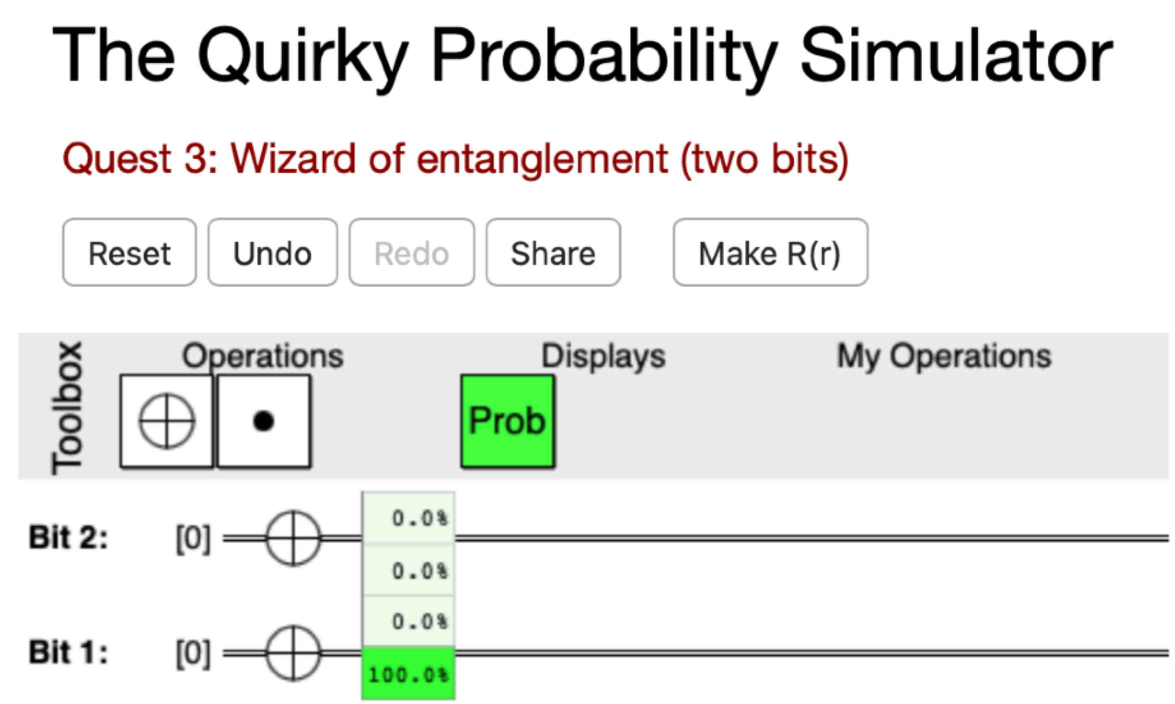
3.1.1 Beide Bits messen



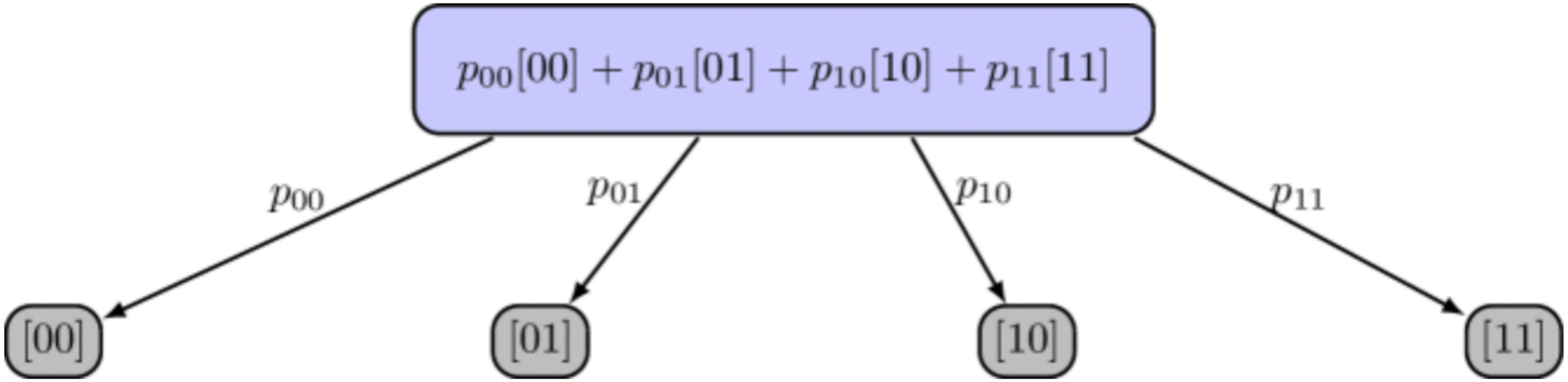
[00]



[11]



3.1.1 Beide Bits messen

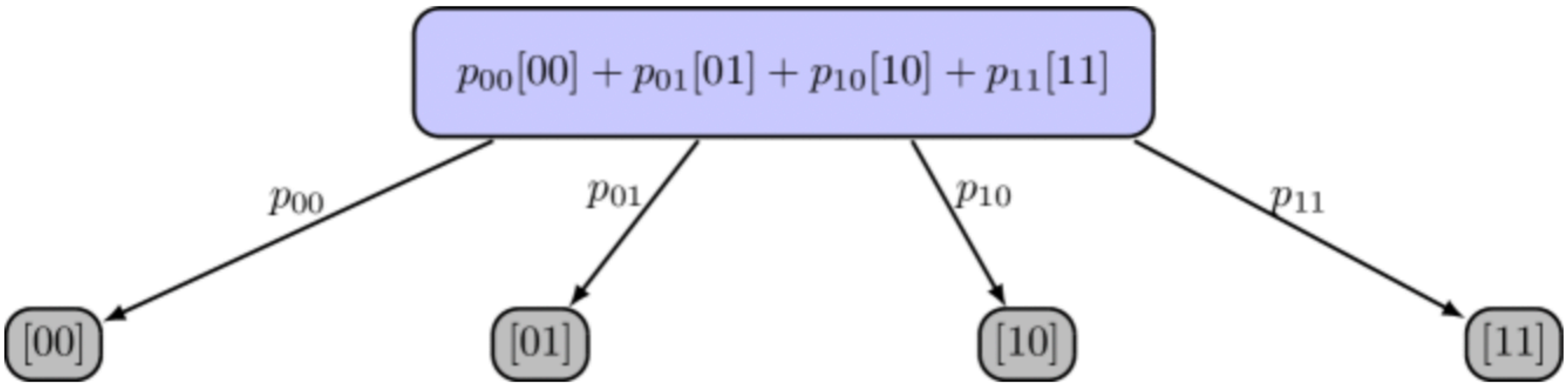


Beispiel: beim Messen des Zustandes

1/2 [00] + 1/2 [11]

erhalten wir [00] und [11] mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 50%

3.1.1 Beide Bits messen



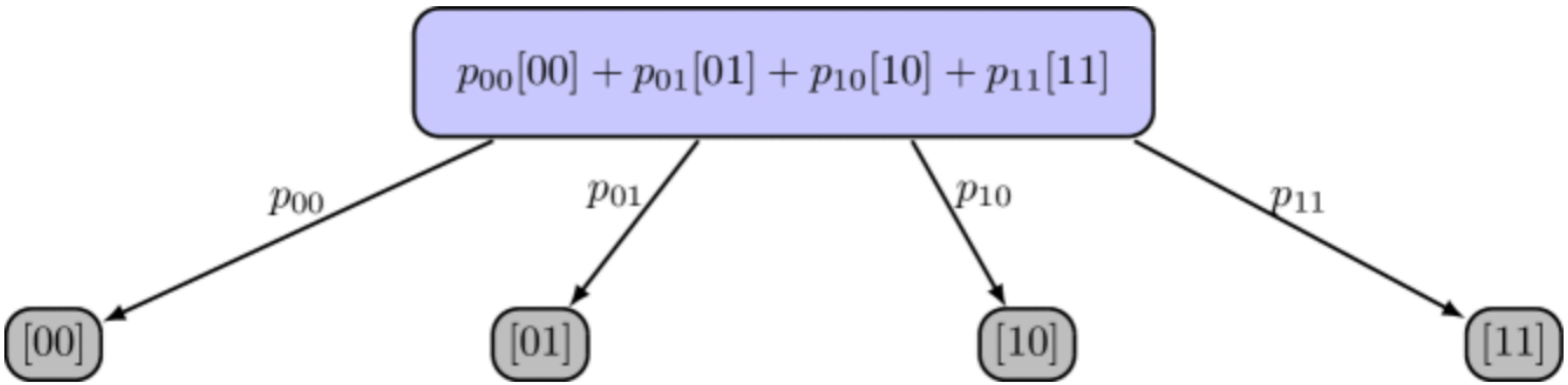
Beispiel: beim Messen des Zustandes

1/2 [00] + 1/2 [11]

erhalten wir [00] und [11] mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 50%

Misst man bei diesem besonderen Zustand nur das erste Bit, dann kennt man automatisch auch den Wert des zweiten Bits,

3.1.1 Beide Bits messen



Beispiel: beim Messen des Zustandes

1/2 [00] + 1/2 [11]

erhalten wir [00] und [11] mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 50%

Misst man bei diesem besonderen Zustand nur das erste Bit, dann kennt man automatisch auch den Wert des zweiten Bits,
d.h. die beiden EinzelBits sind perfekt korreliert

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

$$\mathrm{NOT}_2\,[00] = [01], \quad \mathrm{NOT}_2[01] = [00], \quad \mathrm{NOT}_2[10] = [11], \quad \mathrm{NOT}_2[11] = [10].$$

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

$$\mathrm{NOT}_2\,[00] = [01], \quad \mathrm{NOT}_2[01] = [00], \quad \mathrm{NOT}_2[10] = [11], \quad \mathrm{NOT}_2[11] = [10].$$

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf probabilistisches Bit):

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

$$\mathrm{NOT}_2\,[00] = [01], \quad \mathrm{NOT}_2[01] = [00], \quad \mathrm{NOT}_2[10] = [11], \quad \mathrm{NOT}_2[11] = [10].$$

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf probabilistisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_2\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right)$$

$$= p_{00}[01] + p_{01}[00] + p_{10}[11] + p_{11}[10]$$

$$= p_{01}[00] + p_{00}[01] + p_{11}[10] + p_{10}[11],$$

3.1.2 Lokale Operationen

Lokale Operation: man macht auf den einzelnen Bits EinBit Operationen
Globale Operation: man macht gleichzeitig auf allen Bits eine Operation

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf deterministisches Bit):

$$\mathrm{NOT}_1\,[00] = [10], \quad \mathrm{NOT}_1[01] = [11], \quad \mathrm{NOT}_1[10] = [00], \quad \mathrm{NOT}_1[11] = [01].$$

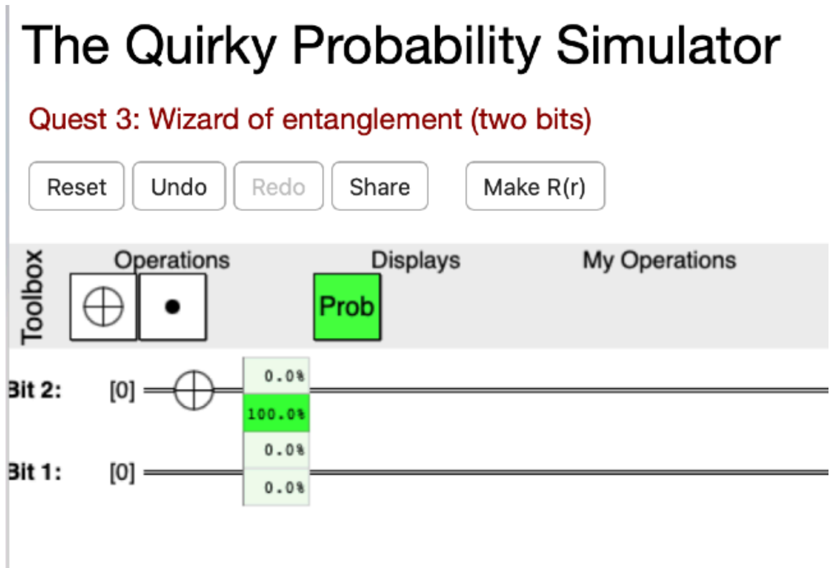
$$\mathrm{NOT}_2\,[00] = [01], \quad \mathrm{NOT}_2[01] = [00], \quad \mathrm{NOT}_2[10] = [11], \quad \mathrm{NOT}_2[11] = [10].$$

Beispiel für lokale Operation (Wirkung auf probabilistisches Bit):

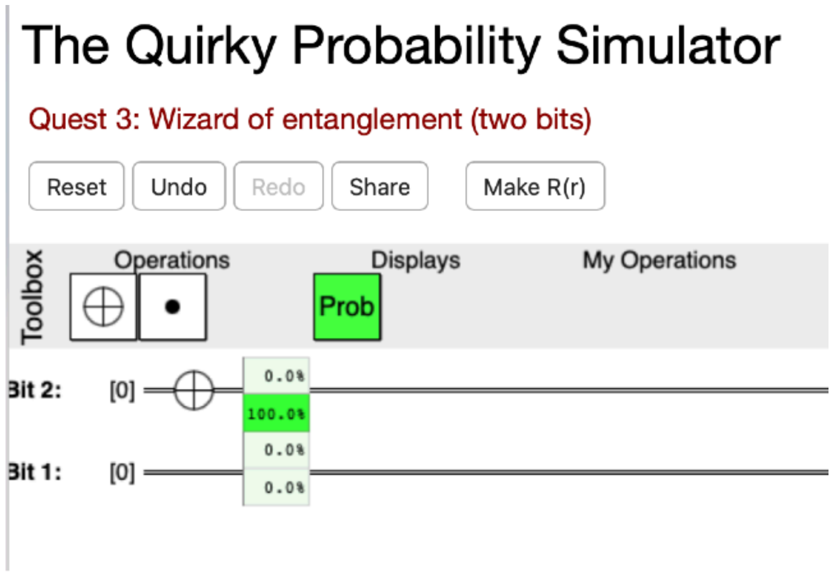
$$\begin{aligned}
&\mathrm{NOT}_2\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right) \\
&= p_{00}[01] + p_{01}[00] + p_{10}[11] + p_{11}[10] \\
&= p_{01}[00] + p_{00}[01] + p_{11}[10] + p_{10}[11],
\end{aligned}$$

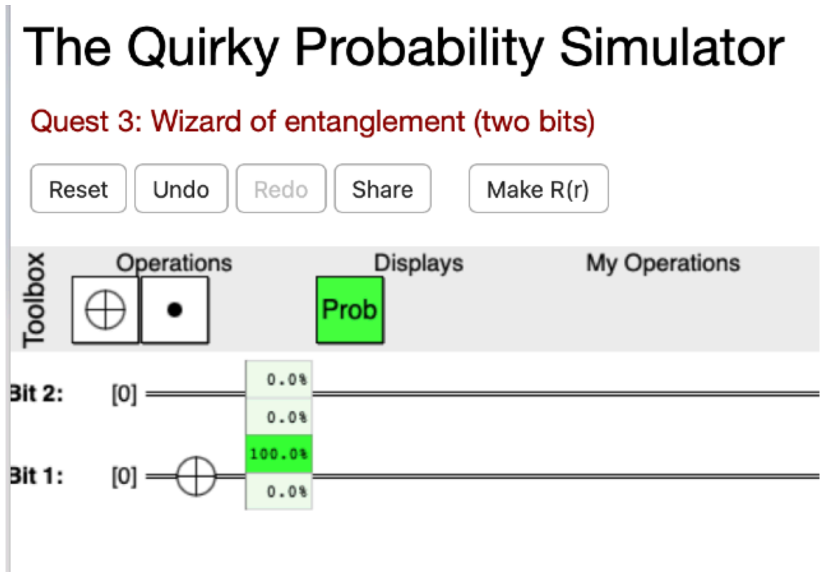
$$\mathrm{NOT}_2 \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{00} \\ p_{11} \\ p_{10} \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Lokale Operationen

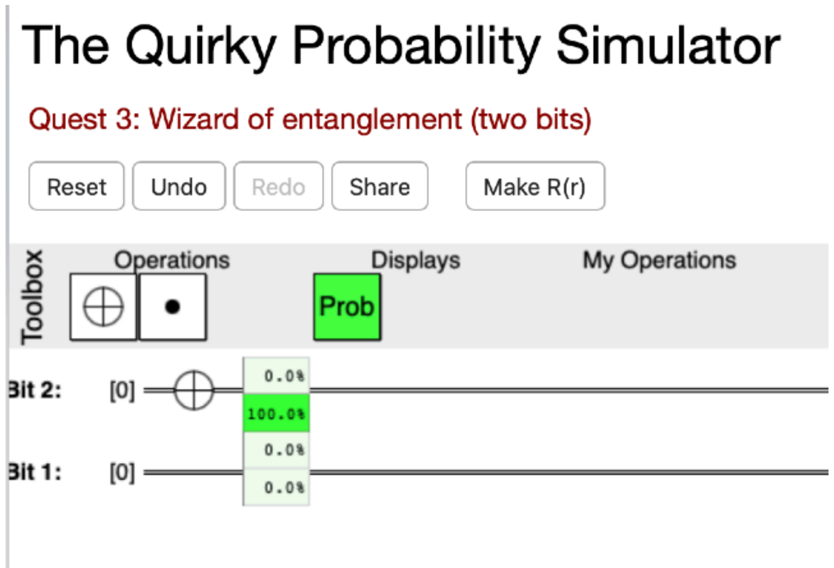


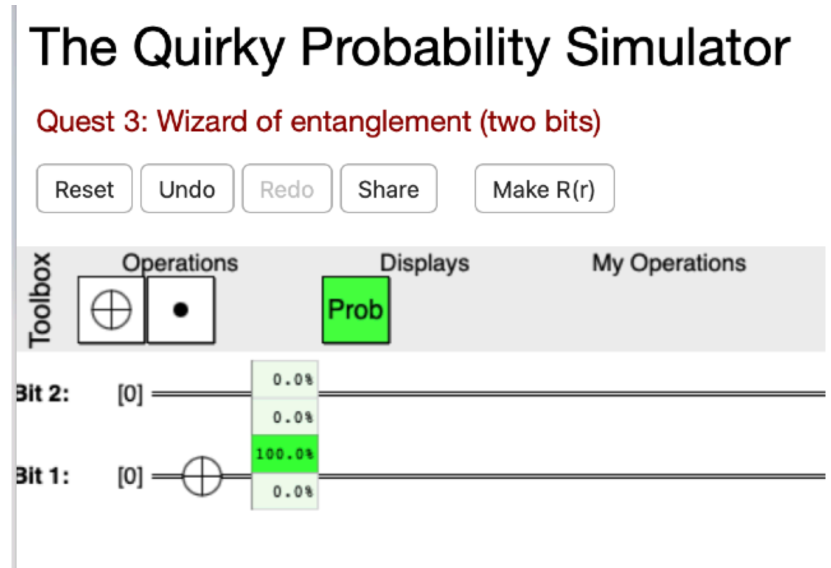
3.1.2 Lokale Operationen

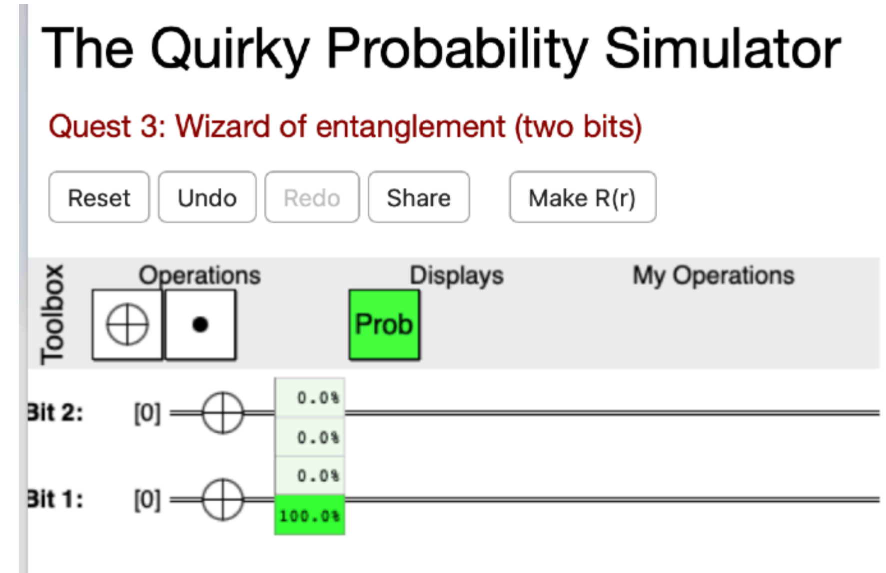




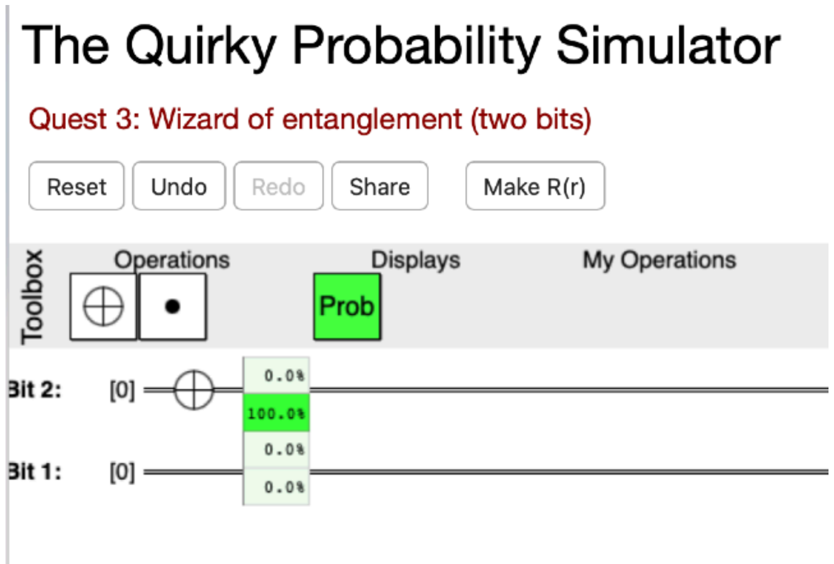
3.1.2 Lokale Operationen

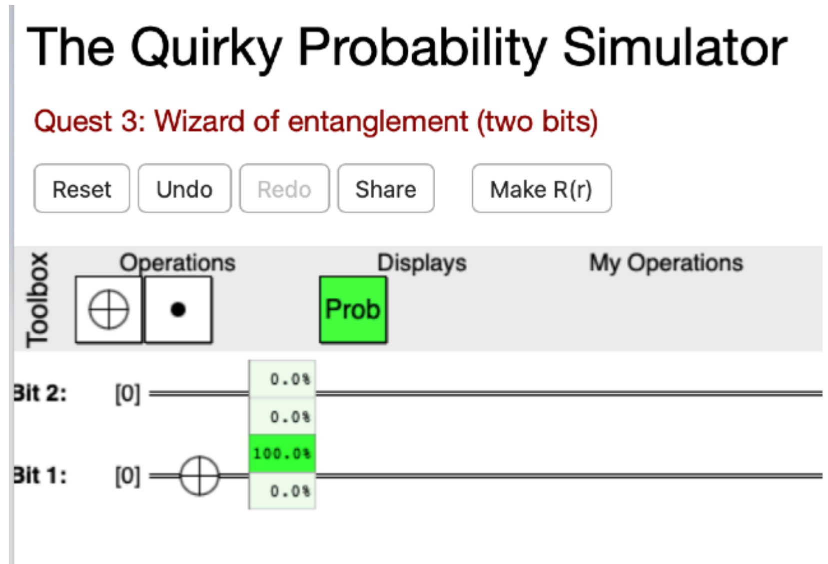


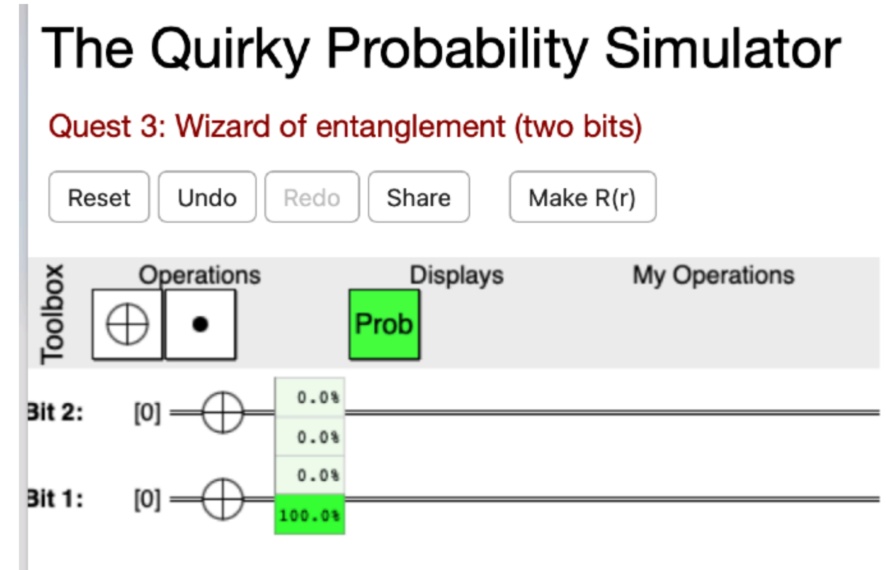




3.1.2 Lokale Operationen

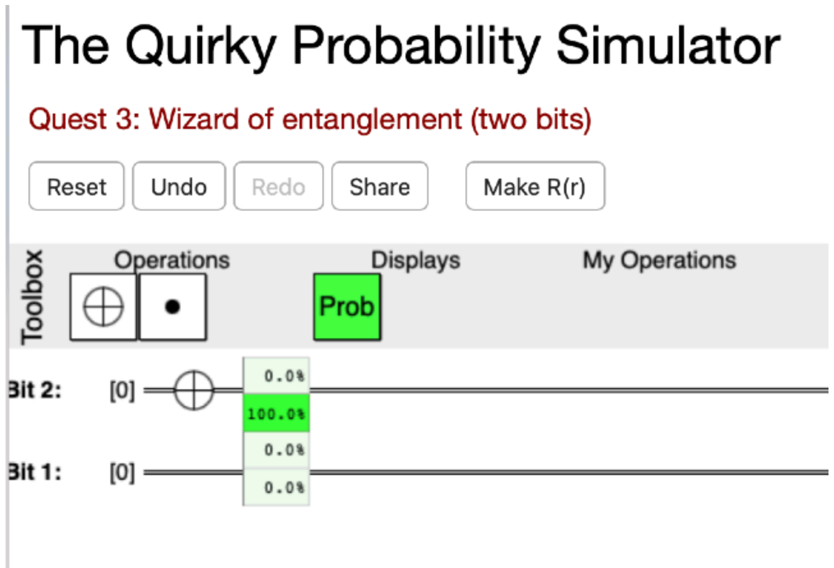


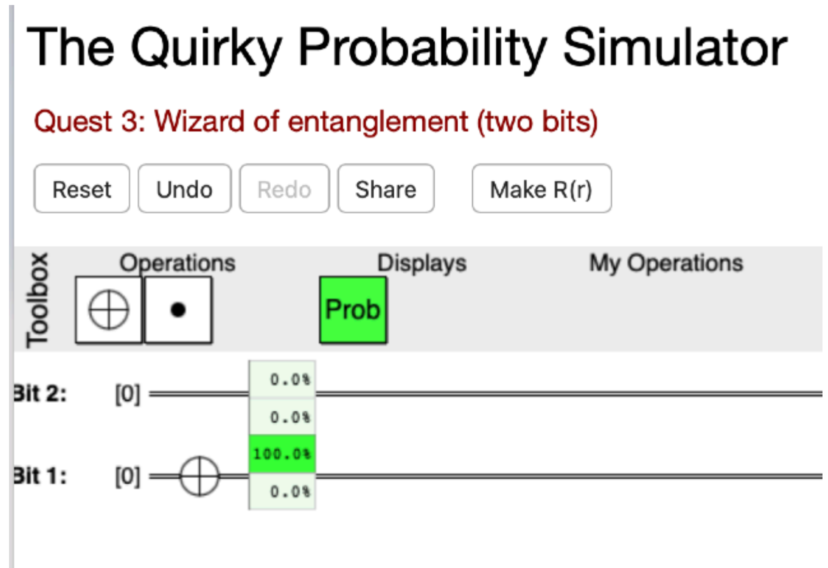


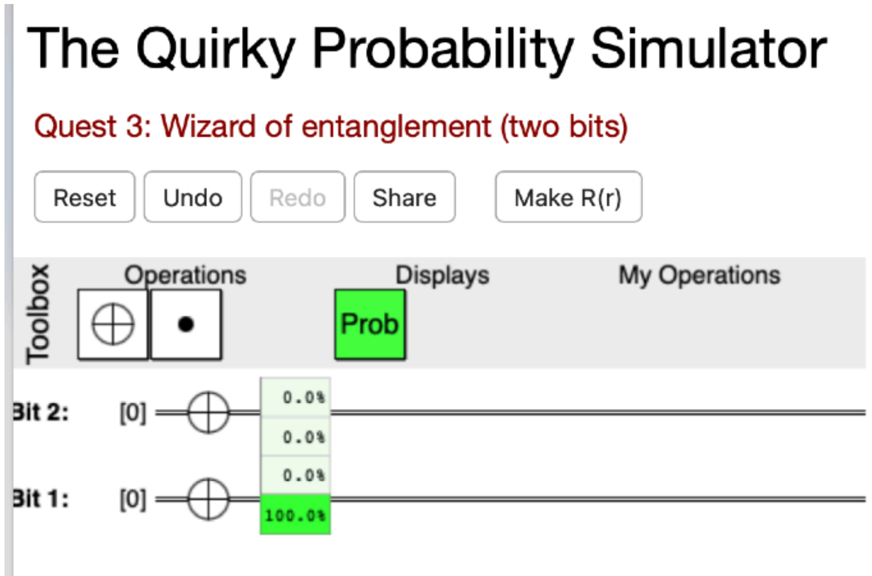


Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

3.1.2 Lokale Operationen





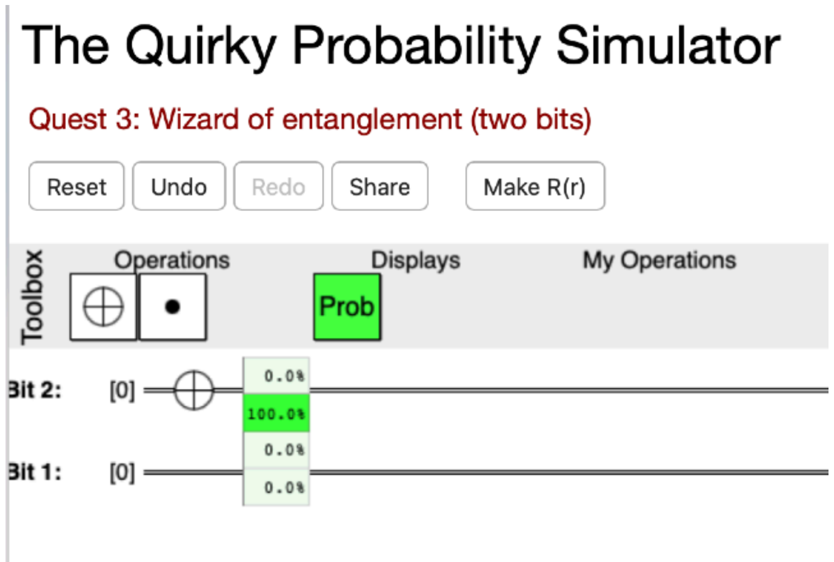


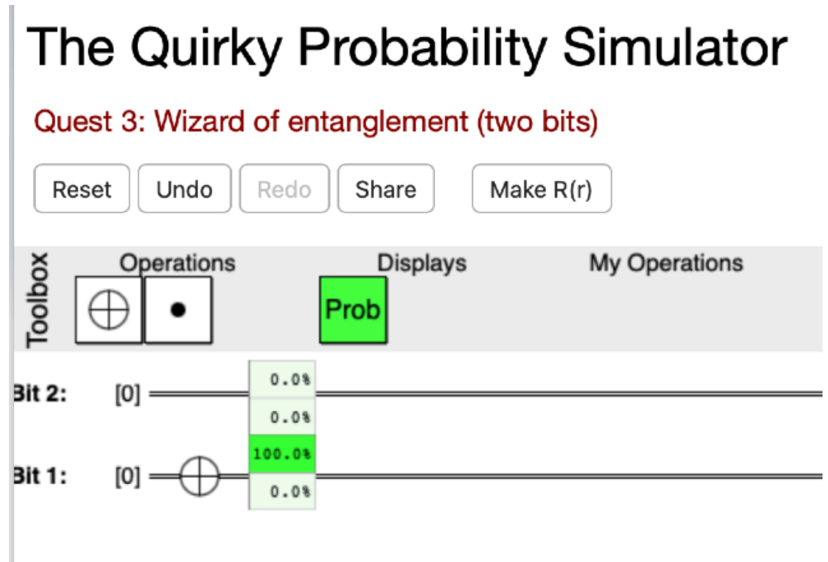
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

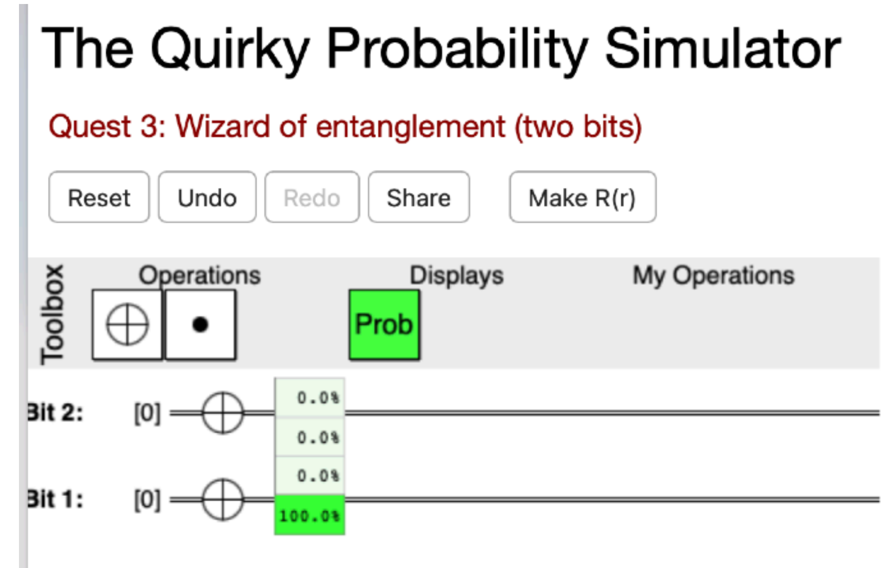
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] =$$
$$\hat{R}(r)_1[01] =$$
$$\hat{R}(r)_1[10] =$$
$$\hat{R}(r)_1[11] =$$

3.1.2 Lokale Operationen





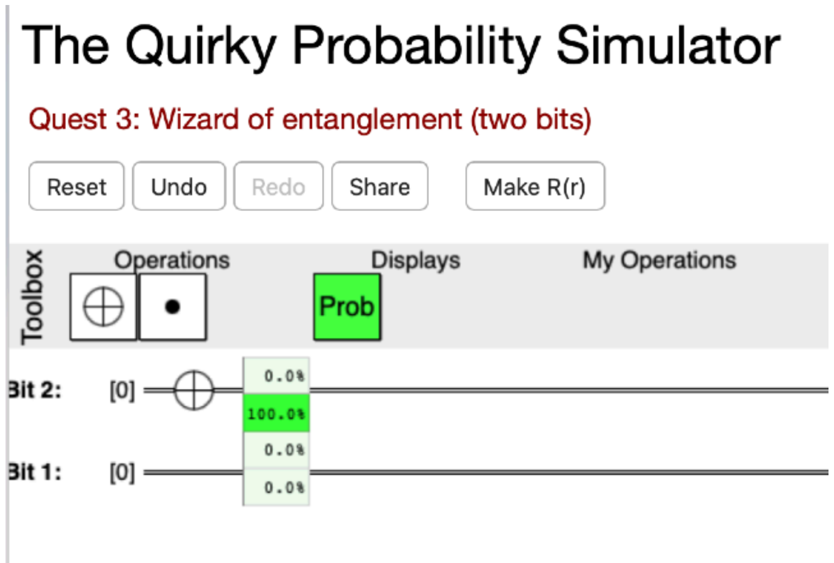


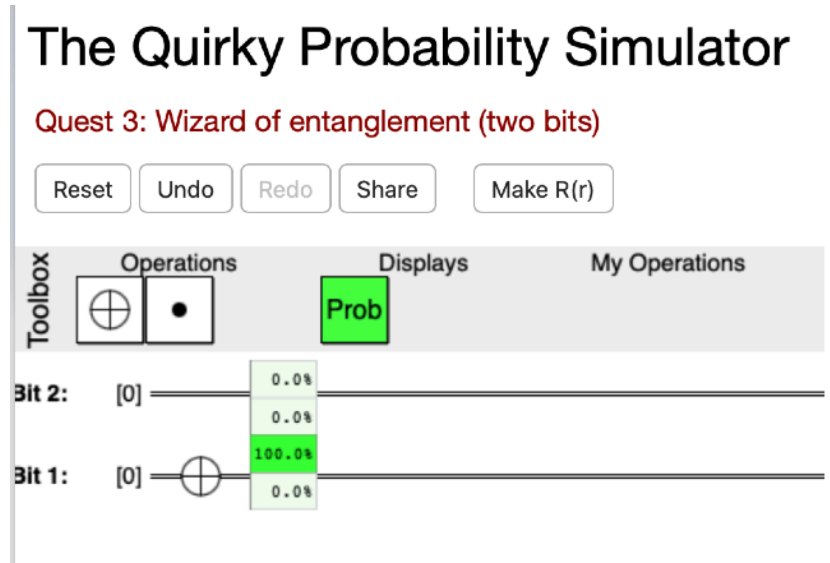
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

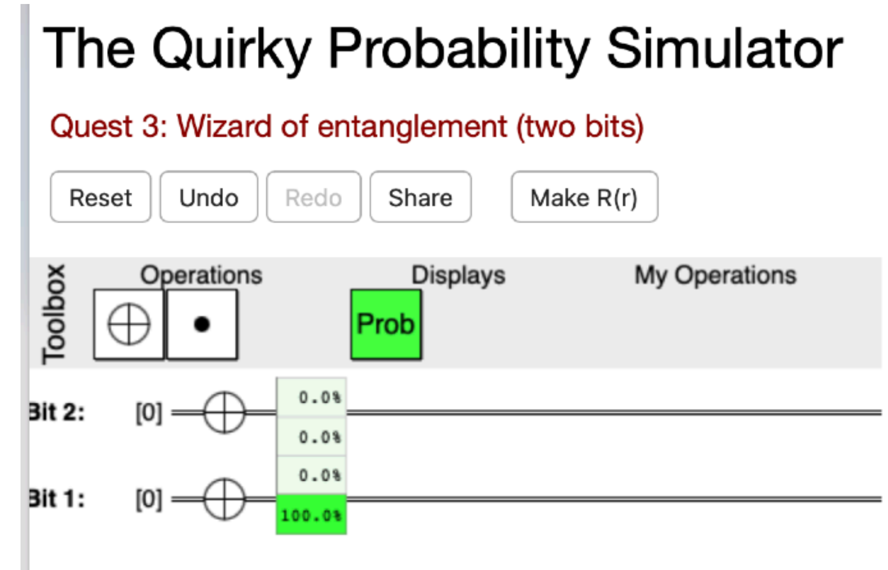
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] =$$
$$\hat{R}(r)_1[10] =$$
$$\hat{R}(r)_1[11] =$$

3.1.2 Lokale Operationen





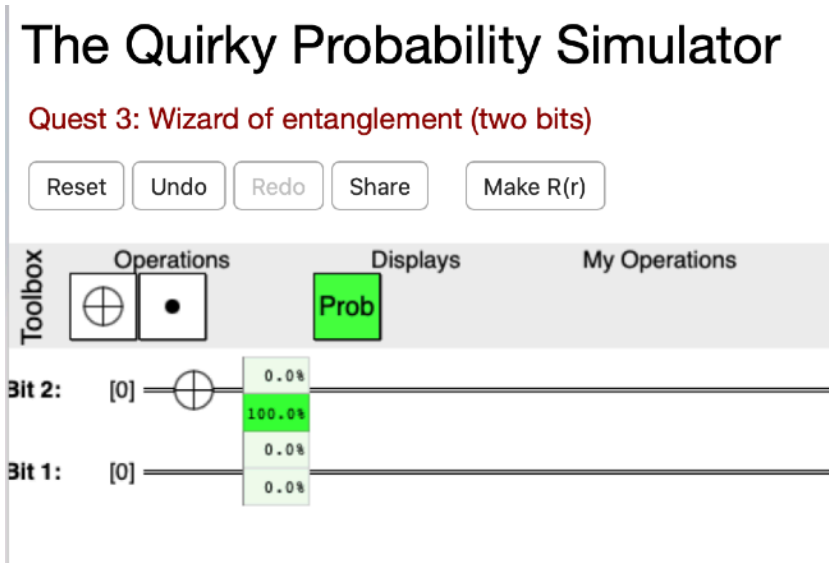


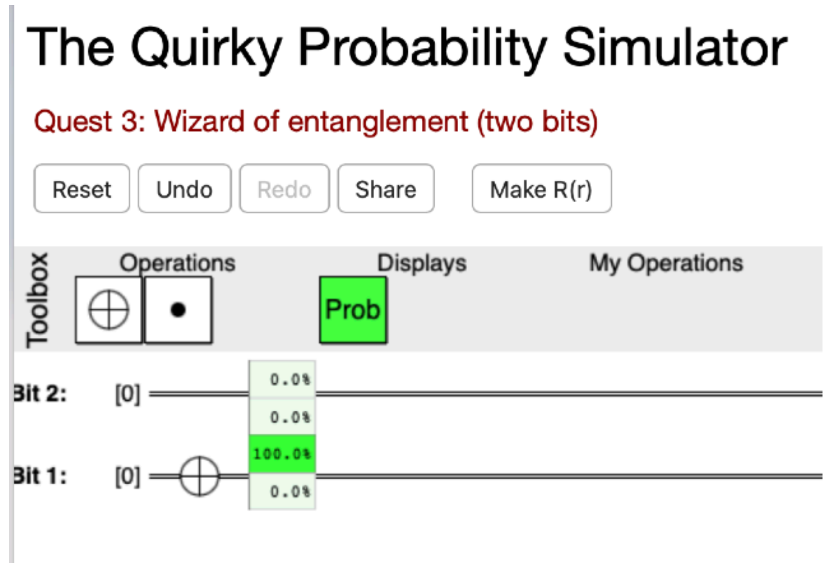
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1 - r)[1]$

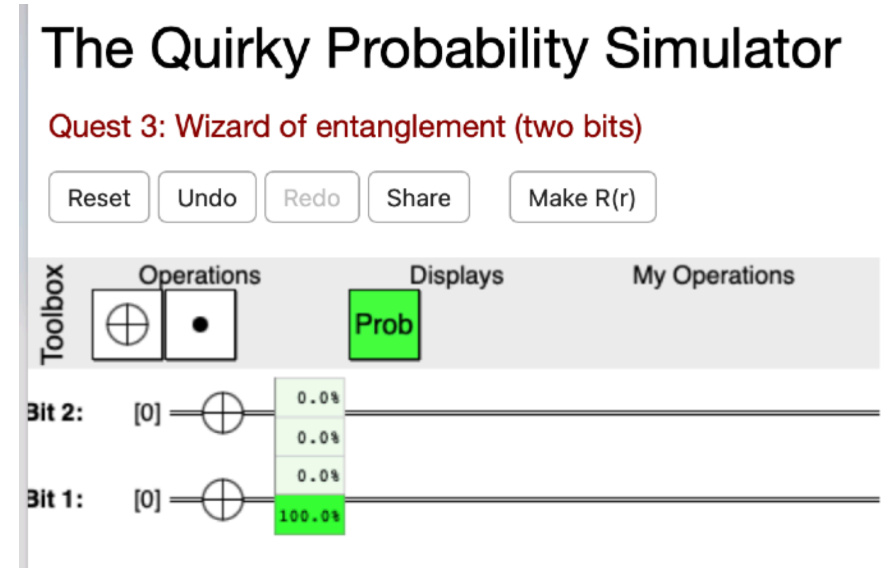
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] =$$
$$\hat{R}(r)_1[11] =$$

3.1.2 Lokale Operationen





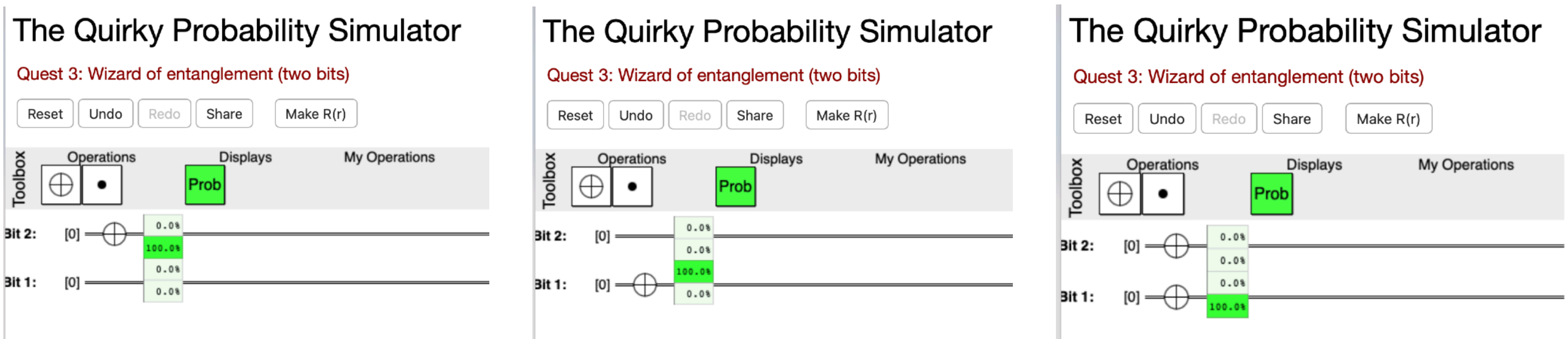


Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] =$$

3.1.2 Lokale Operationen

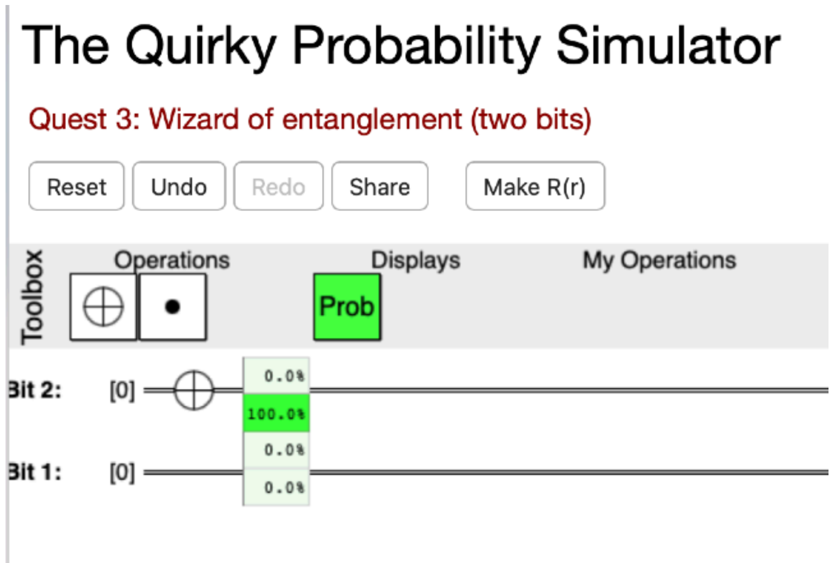


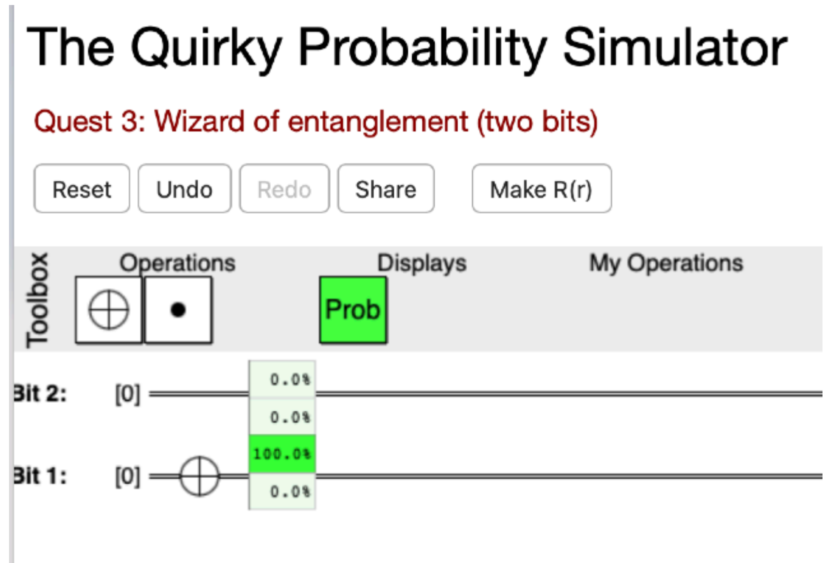
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

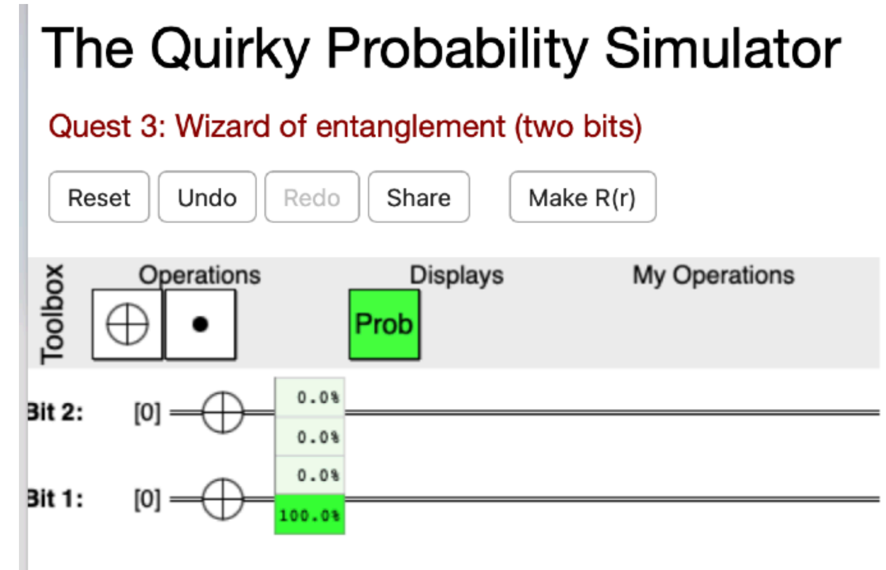
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

3.1.2 Lokale Operationen







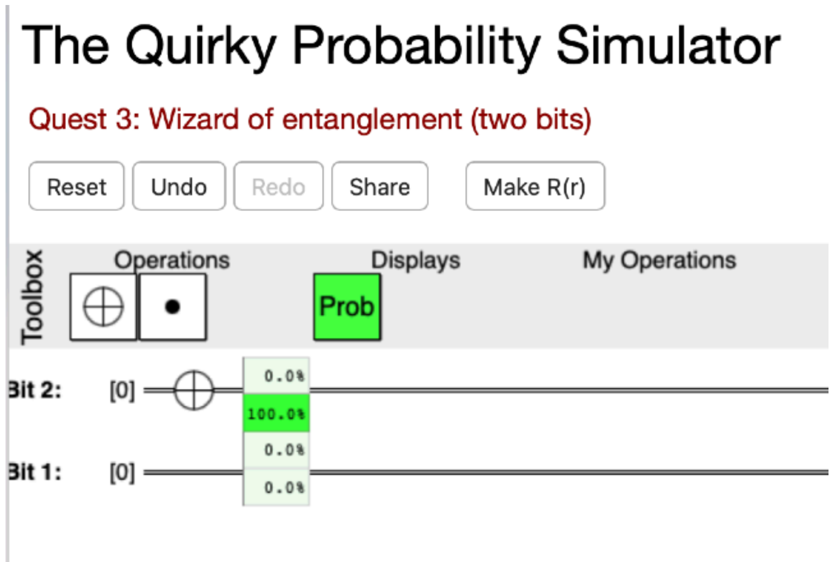
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

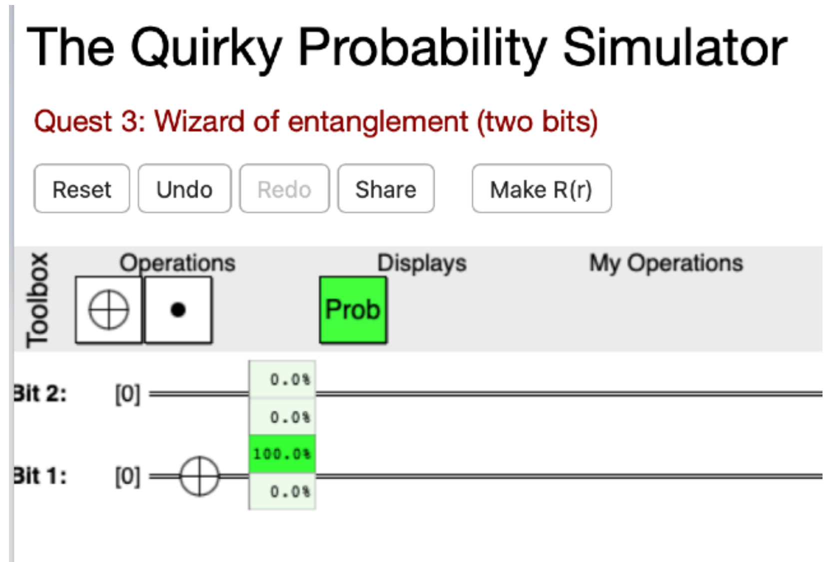
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

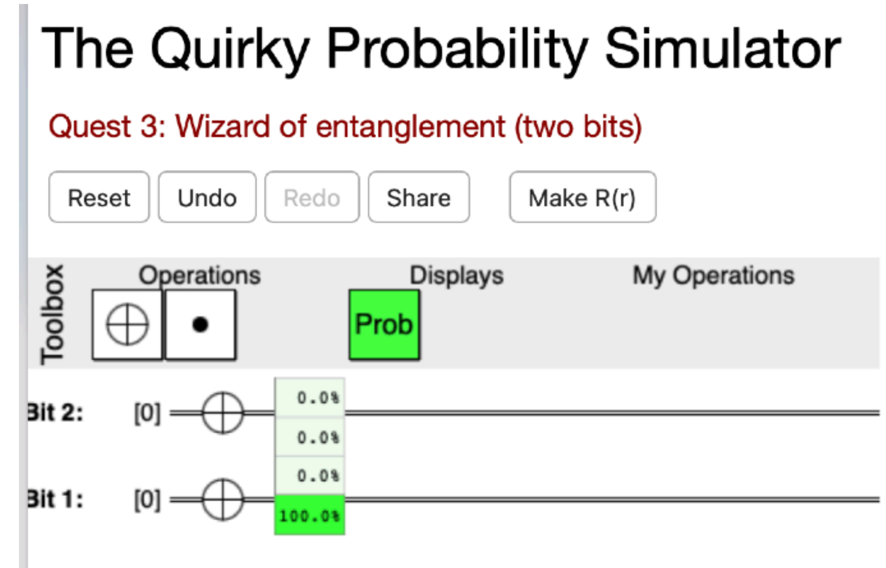
$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Beispiel: $\hat{R}(1/3)_1[11]$

3.1.2 Lokale Operationen







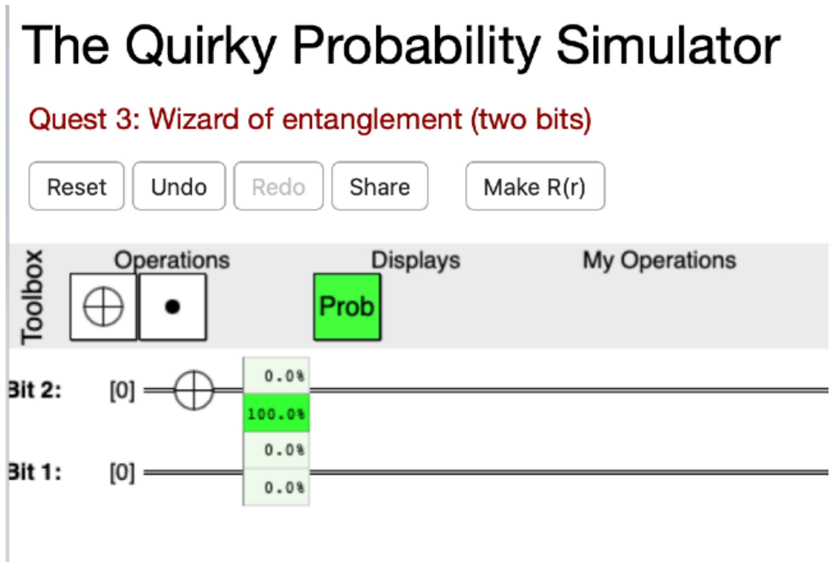
Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$

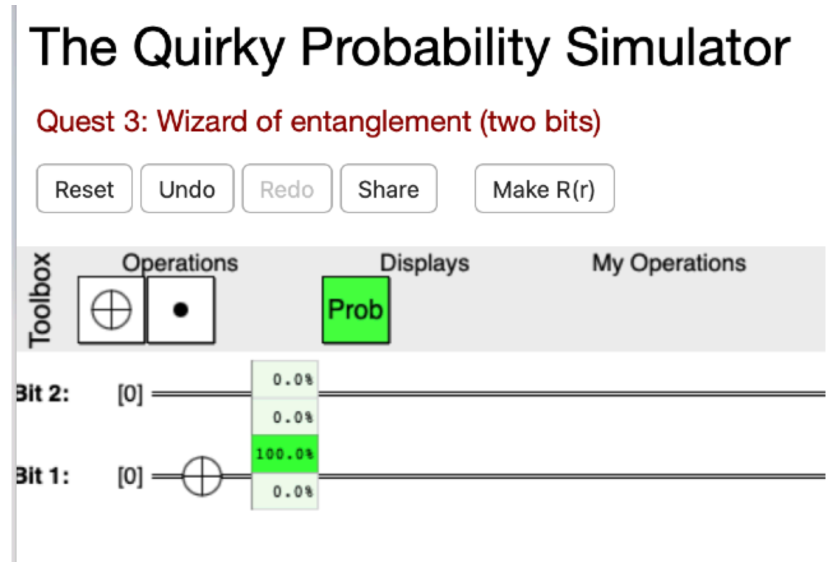
Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

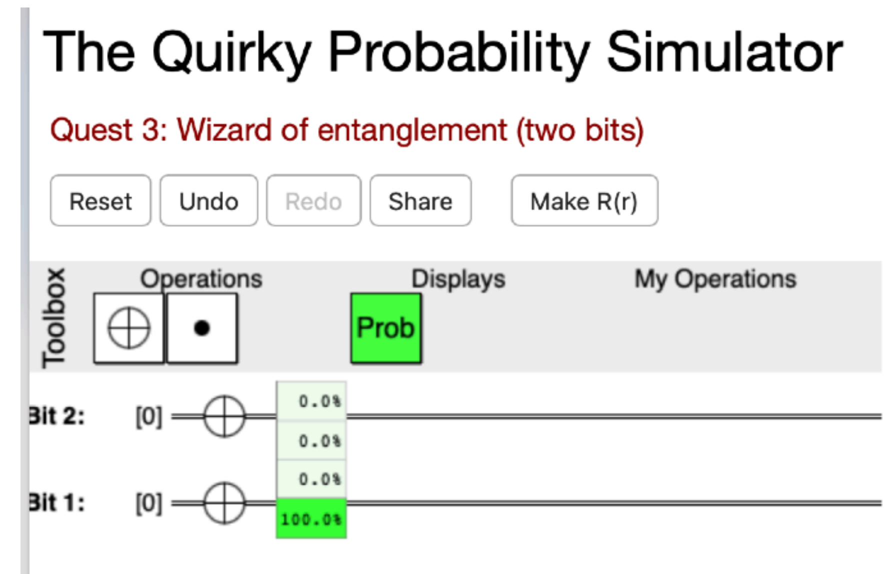
$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Beispiel: $\hat{R}(1/3)_1[11] = \dfrac{1}{3}[01] + \dfrac{2}{3}[11]$

3.1.2 Lokale Operationen





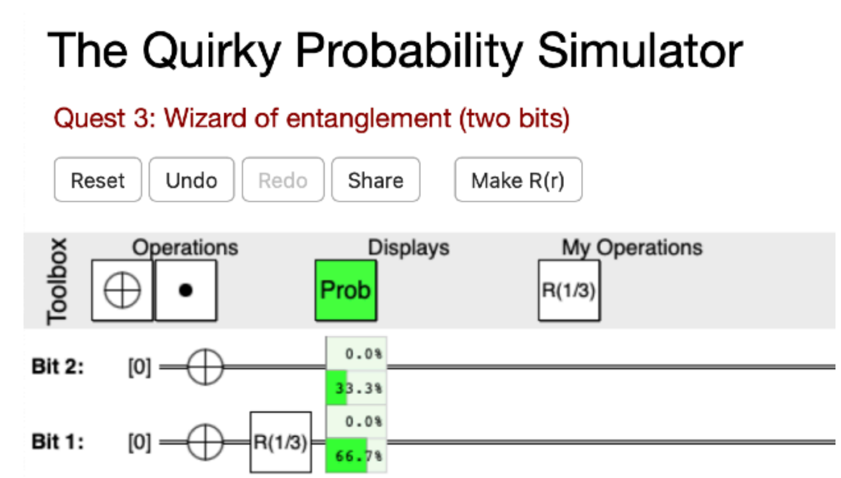


Wdh: $\hat{R}(r)[0] = [0]$ **und** $\hat{R}(r)[1] = r[0] + (1 - r)[1]$

Damit erhalten wir für die lokalen Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1 - r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1 - r)[11]$$

Beispiel: $\hat{R}(1/3)_1[11] = \dfrac{1}{3}[01] + \dfrac{2}{3}[11]$



3.1.2 Lokale Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von Quirky in Gl. 3.12 richtig ist.

3.1.2 Lokale Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von QUIRKY in Gl. 3.12 richtig ist.

$$\hat{R}(r)_2[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_2[01] = r[00] + (1-r)[01]$$
$$\hat{R}(r)_2[10] = [10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

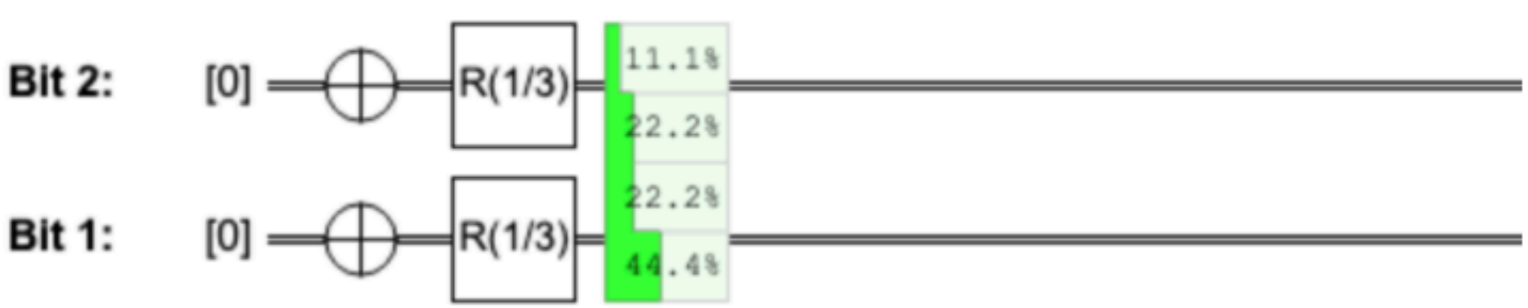
3.1.2 Lokale Operationen

$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von QUIRKY in Gl. 3.12 richtig ist.

$$\hat{R}(r)_2[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_2[01] = r[00] + (1-r)[01]$$
$$\hat{R}(r)_2[10] = [10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$



(3.12)

3.1.2 Lokale Operationen

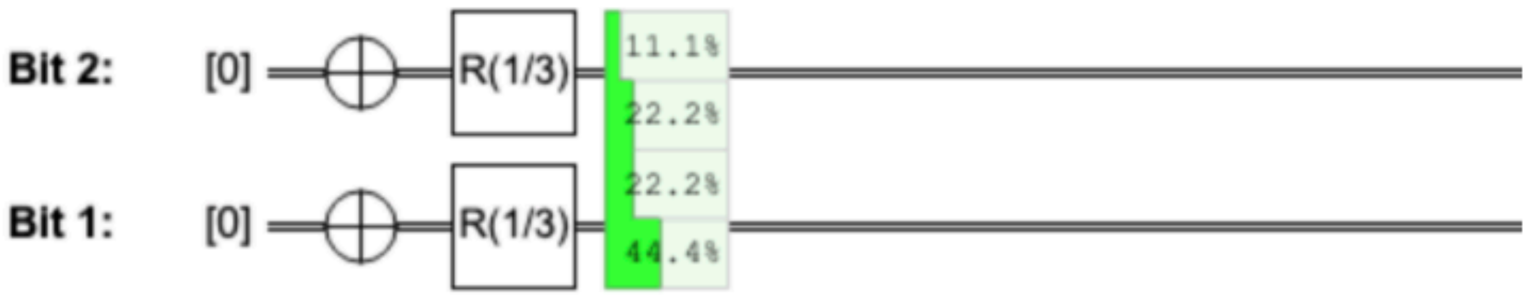
$$\hat{R}(r)_1[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_1[01] = [01]$$
$$\hat{R}(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von Quirky in Gl. 3.12 richtig ist.

$$\hat{R}(r)_2[00] = [00]$$
$$\hat{R}(r)_2[01] = r[00] + (1-r)[01]$$
$$\hat{R}(r)_2[10] = [10]$$
$$\hat{R}(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]$$

$$\hat{R}(1/3)[1] = \frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]$$



(3.12)

3.1.2 Lokale Operationen

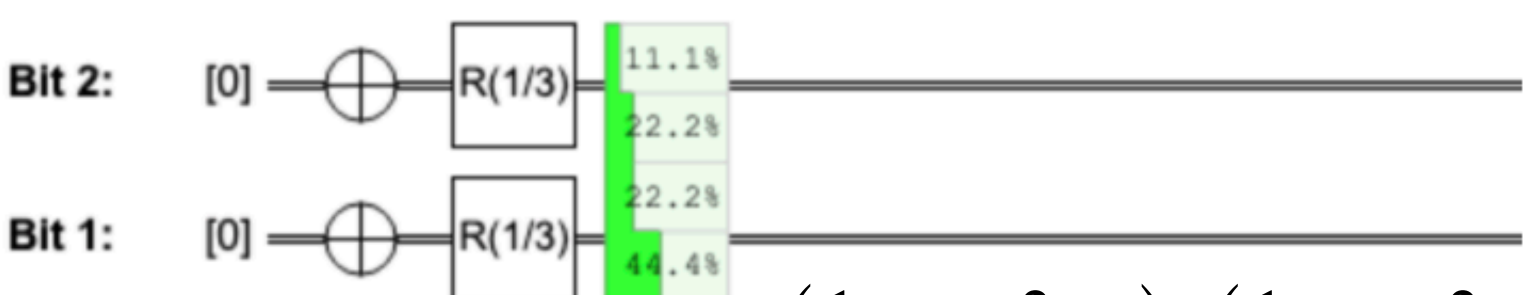
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{R}(r)_1[00] &= [00] \\ \hat{R}(r)_1[01] &= [01] \\ \hat{R}(r)_1[10] &= r[00] + (1-r)[10] \\ \hat{R}(r)_1[11] &= r[01] + (1-r)[11] \end{aligned}}$$

Hausaufgabe 3.1 ($R(r)$ auf dem zweiten Bit).

1. Schreibe analog zu Gl. 3.9 und 3.10 die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von Quirky in Gl. 3.12 richtig ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{R}(r)_2[00] &= [00] \\ \hat{R}(r)_2[01] &= r[00] + (1-r)[01] \\ \hat{R}(r)_2[10] &= [10] \\ \hat{R}(r)_1[11] &= r[01] + (1-r)[11] \end{aligned}}$$

$$\hat{R}(1/3)[1] = \frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]$$



(3.12)

$$\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right)\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) = \frac{1}{9}[00] + \frac{2}{9}([01] + [10]) + \frac{4}{9}[11]$$

3.1.3 Nur ein Bit messen

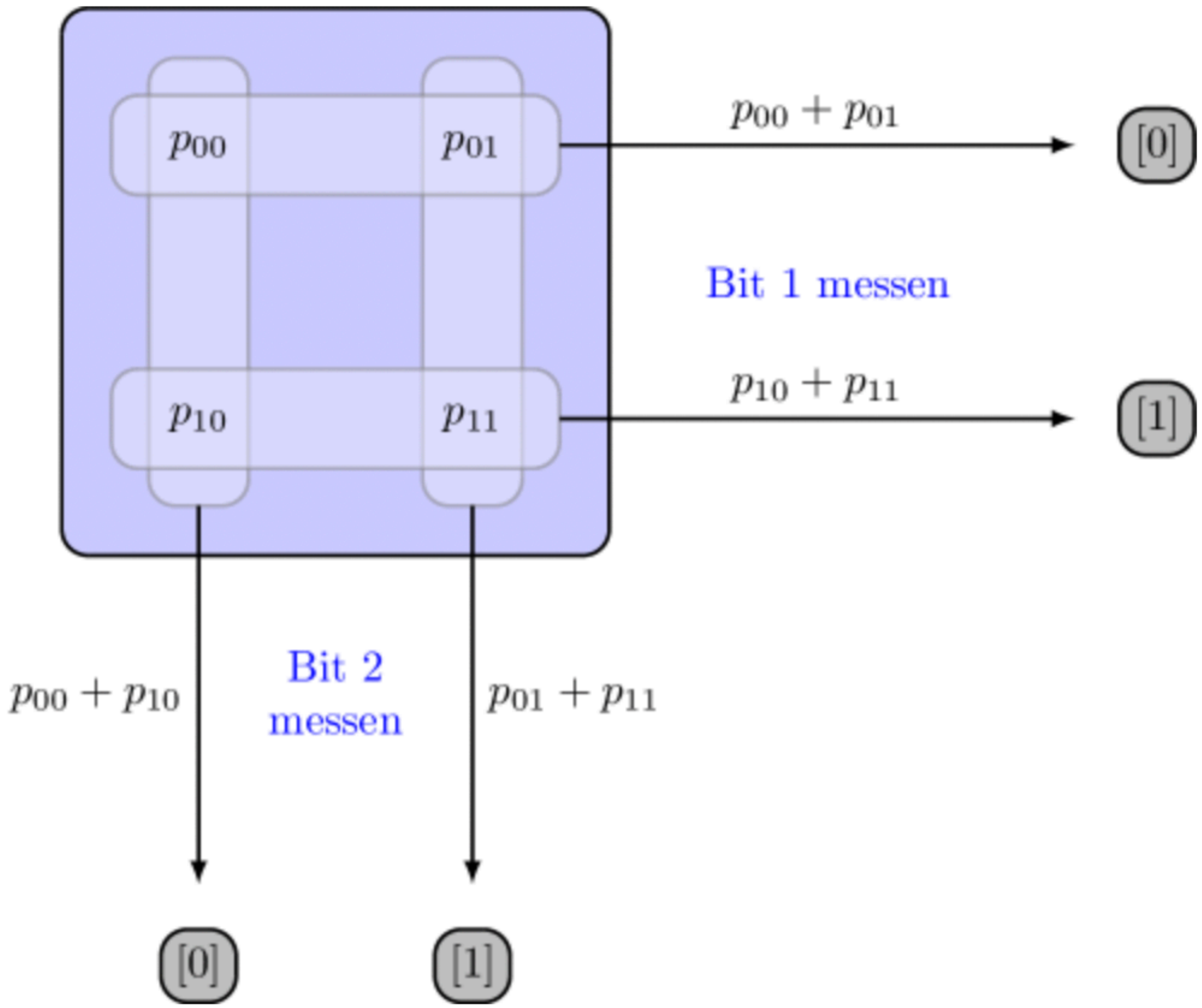
Betrachte den allgemeinen Zustand

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

3.1.3 Nur ein Bit messen

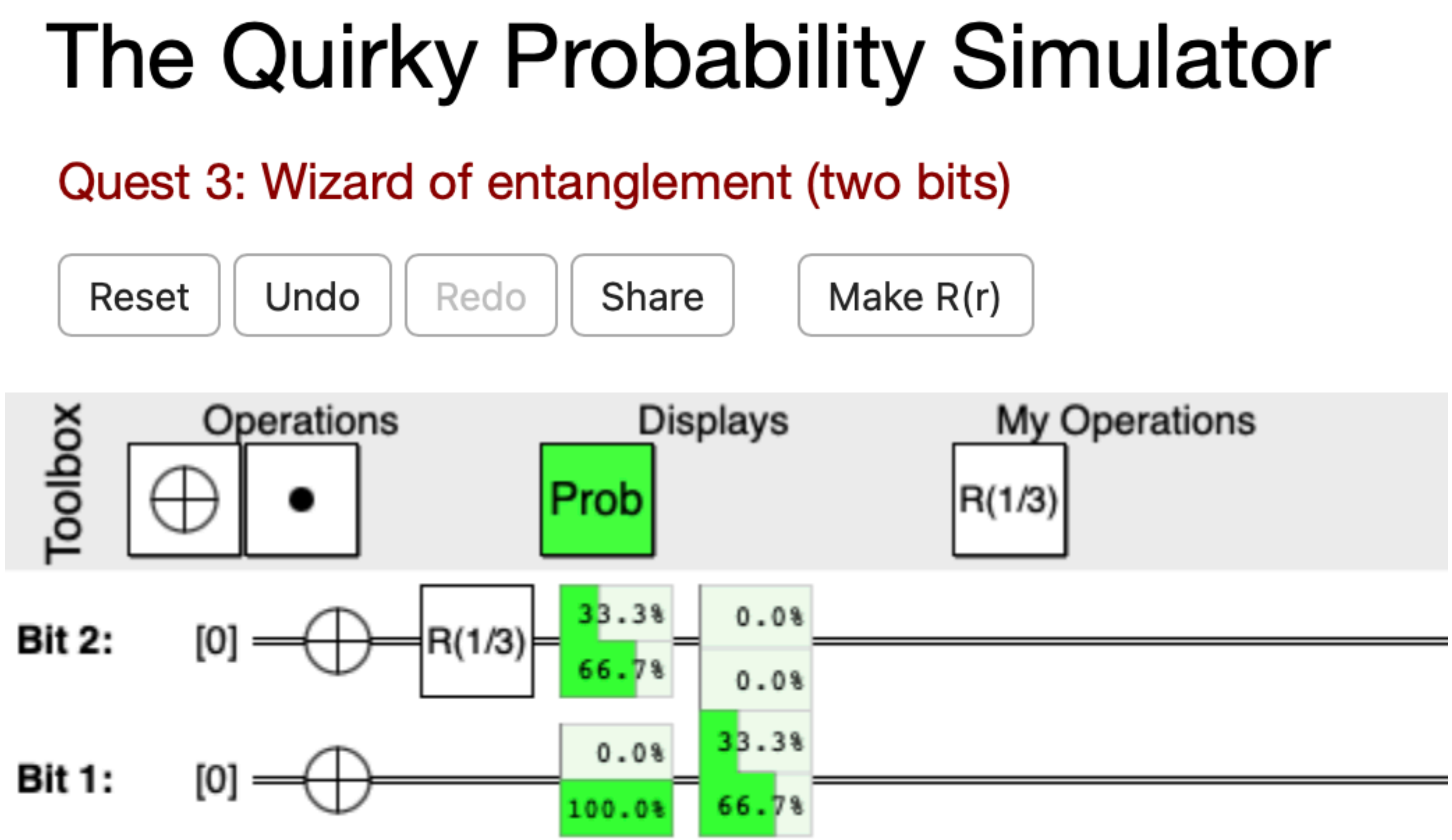
Betrachte den allgemeinen Zustand

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$



3.1.3 Nur ein Bit messen

Mit Quirky kann man auch einzelne Bits messen



3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ **das Ergebnis** $[1]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt**

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $p_{01} + p_{11}$**das Ergebnis** $[1]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $p_{01} + p_{11}$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt**

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ **das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $p_{01} + p_{11}$ **das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messung des ersten im Zustand** $\frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}}[0] + \frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}[1]$

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Wenn ein Bit gemessen wurde, dann befindet sich dies nach der Messung in einem deterministischen Zustand, aber was ist mit dem anderen Bit?

Das hängt vom Zustand ab!

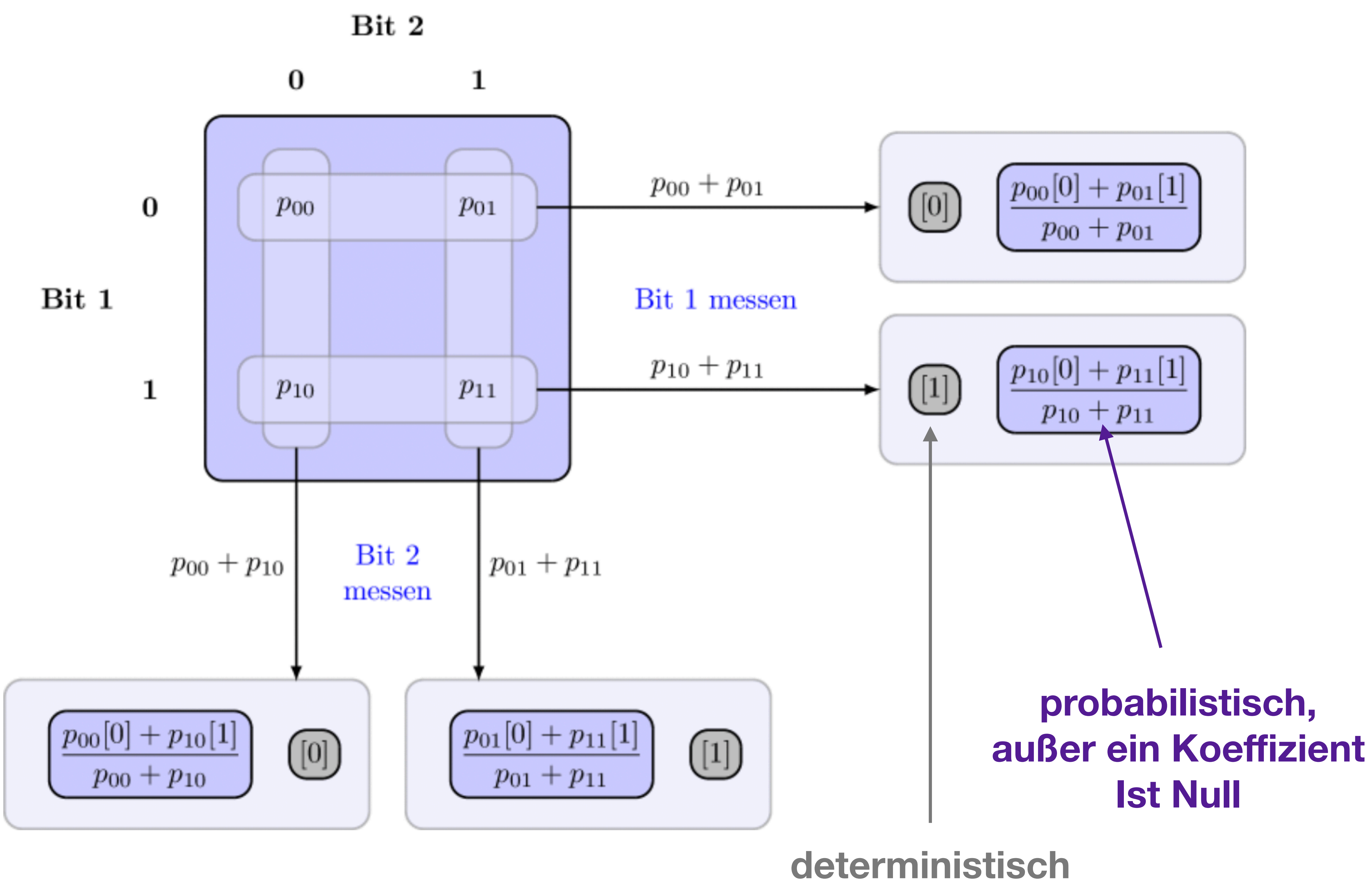
Misst man das erste Bit von $\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messeng des ersten im Zustand** $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$

Misst man das erste Bit von $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$**, dann erhält man mit Wahrscheinlichkeit** $p_{01} + p_{11}$**das Ergebnis** $[1]$**, das zweite Bit ist weiter unbestimmt und befindet sich nach der Messung des ersten im Zustand** $\frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}}[0] + \frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}[1]$

Durch die Summe $p_{10} + p_{11}$ **muss dividiert werden, damit die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 bleibt!**

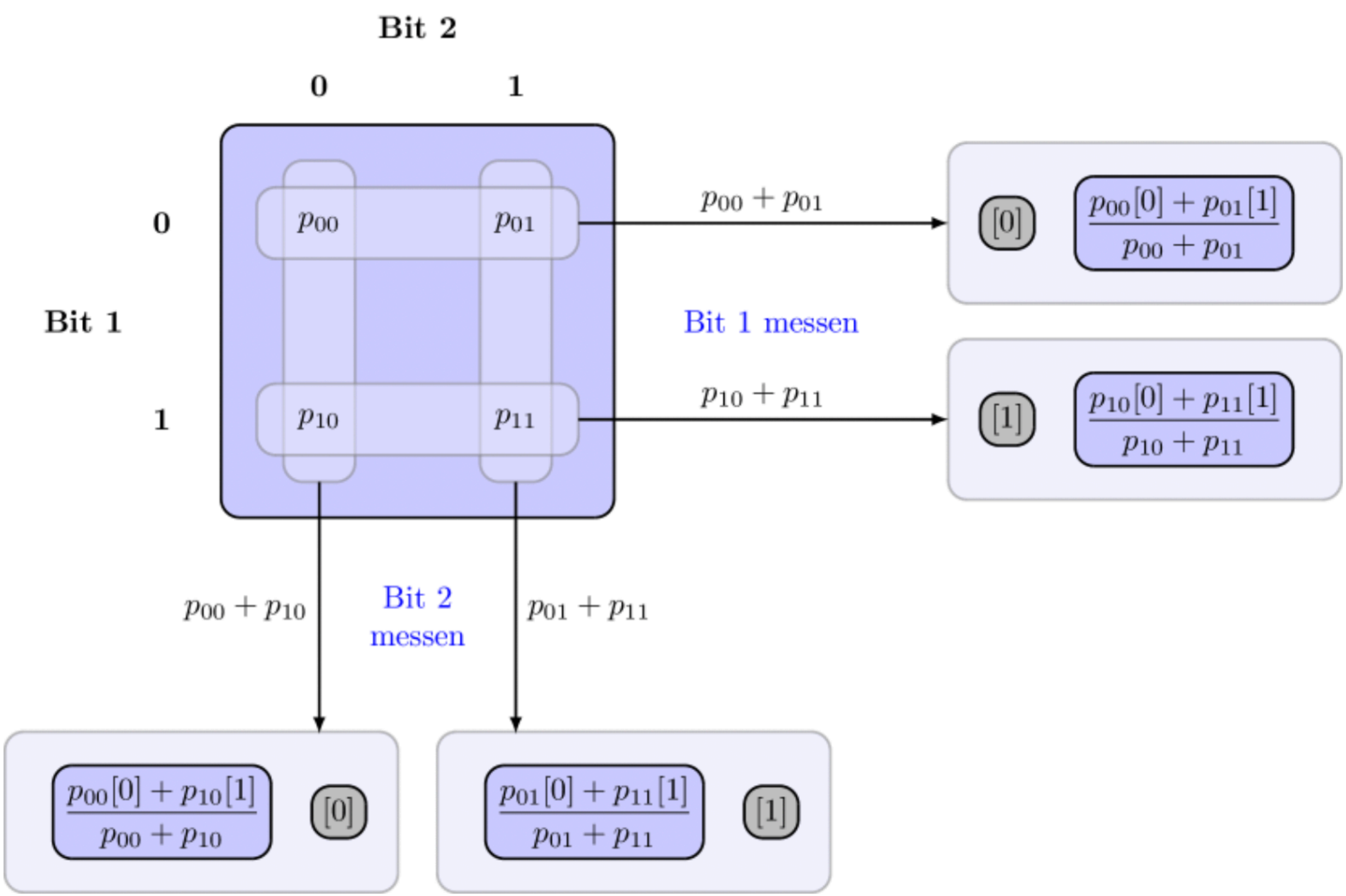
3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



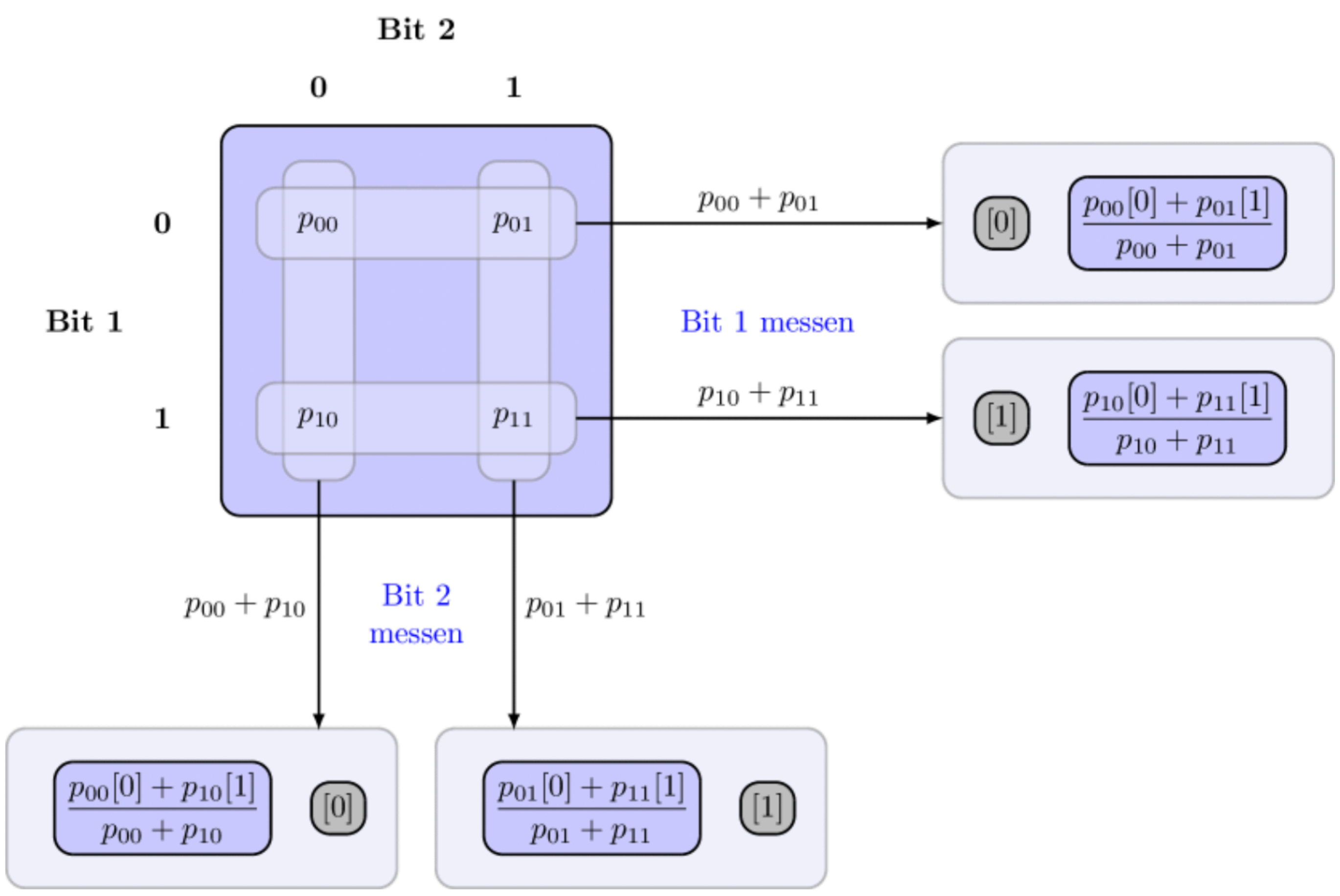
3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

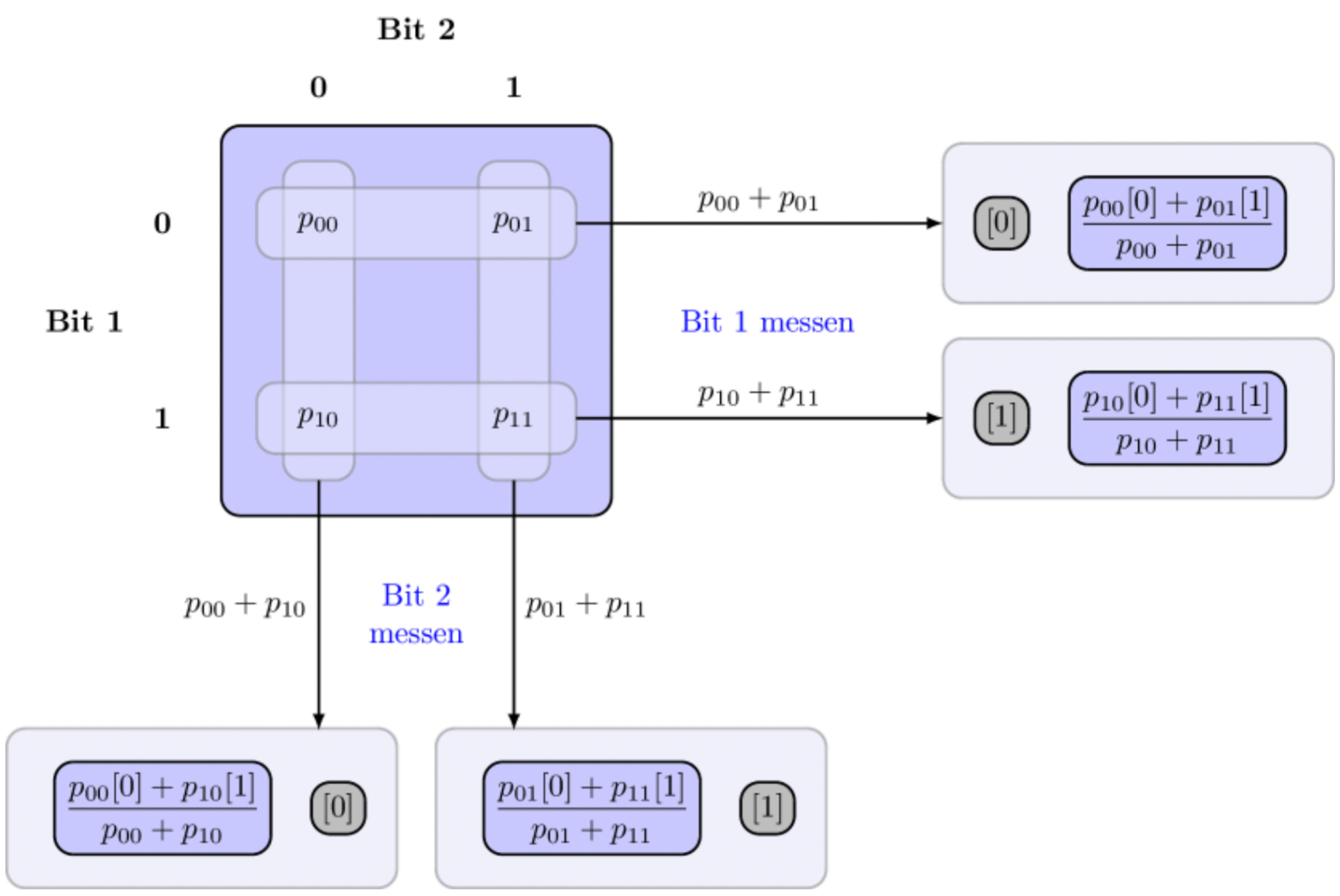
Allgemein findet man



Hier macht es keinen Unterschied ob man beide gleichzeitig misst, oder erst das eine und dann das andere.

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man

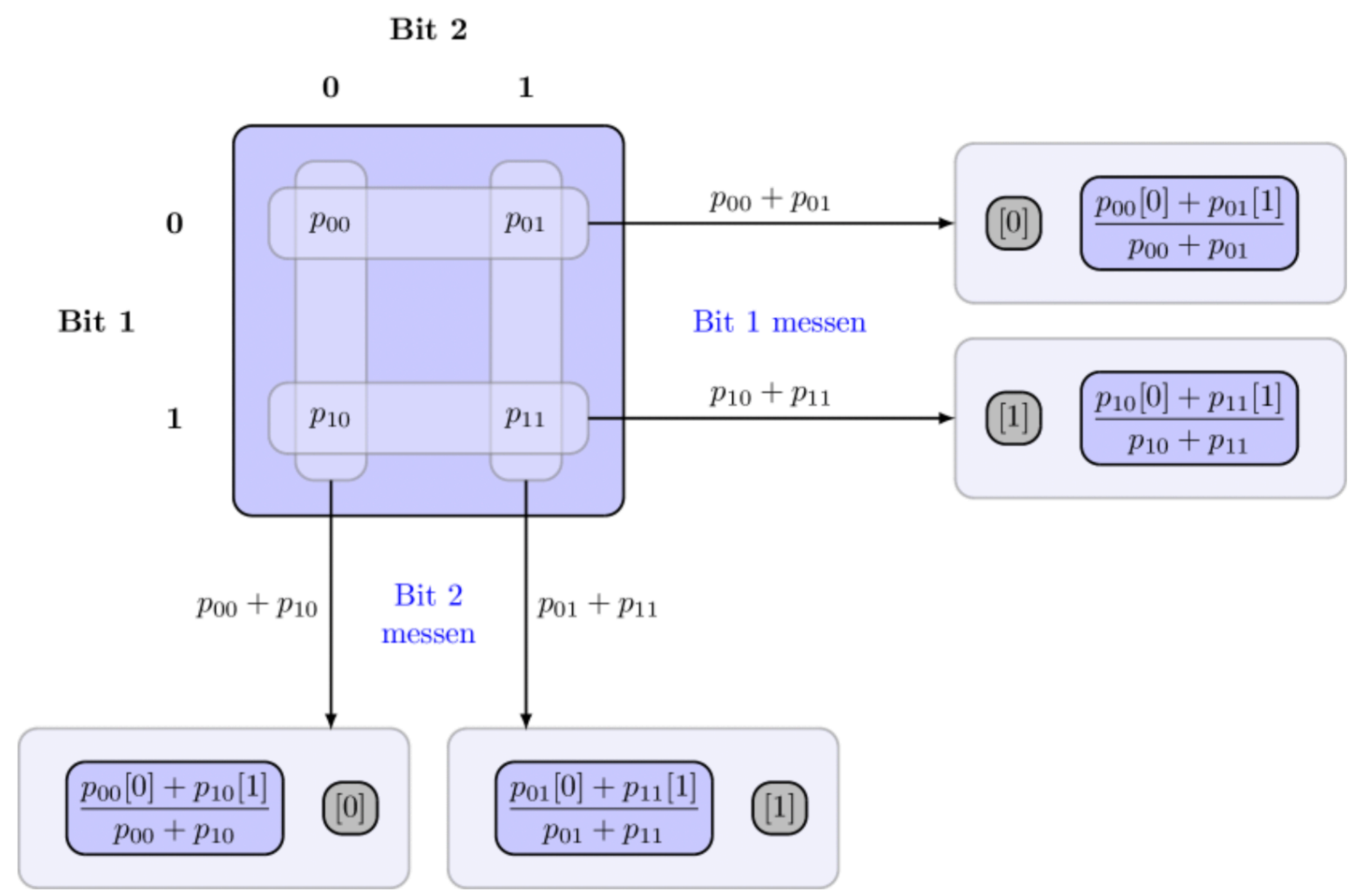


Hier macht es keinen Unterschied ob man beide gleichzeitig misst, oder erst das eine und dann das andere.

Beispiel: das Ergebnis $[11]$ kann man mit der Wahrscheinlichkeit p_{11} bestimmen

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



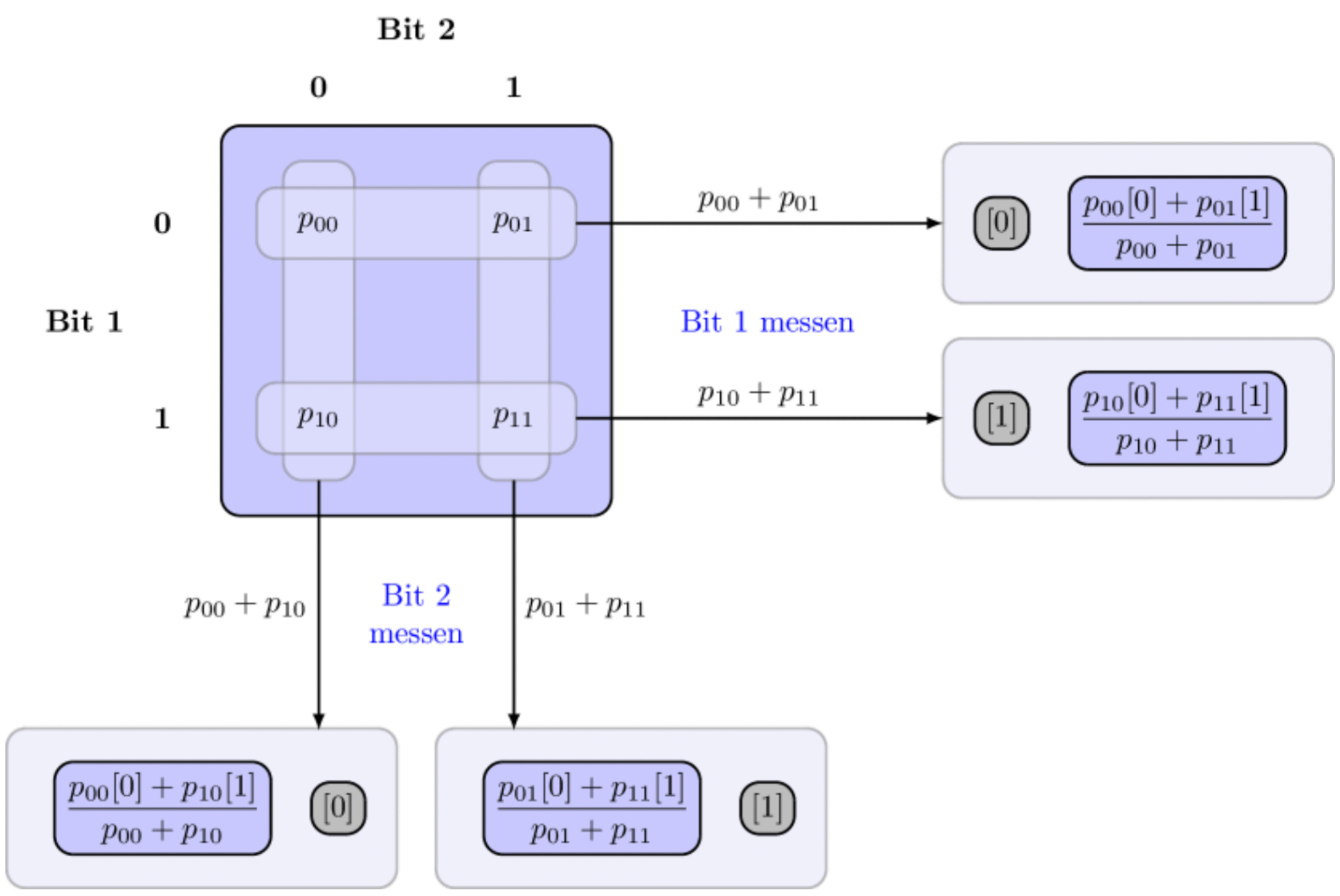
Hier macht es keinen Unterschied ob man beide gleichzeitig misst, oder erst das eine und dann das andere.

Beispiel: das Ergebnis $[11]$ kann man mit der Wahrscheinlichkeit p_{11} bestimmen

Oder erst das erste Bit mit $p_{10}+p_{11}$ und dann das zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{p_{11}}{p_{10}+p_{11}}$ - das Produkt gibt wieder p_{11}

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Allgemein findet man



Hier macht es keinen Unterschied ob man beide gleichzeitig misst, oder erst das eine und dann das andere.

Beispiel: das Ergebnis $[11]$ kann man mit der Wahrscheinlichkeit p_{11} bestimmen

Oder erst das erste Bit mit $p_{10} + p_{11}$ und dann das zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}$ - das Produkt gibt wieder p_{11}

Oder erst das zweite Bit mit $p_{01} + p_{11}$ und dann das zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p_{11}}{p_{01} + p_{11}}$ - das Produkt gibt wieder p_{11}

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Übungsaufgabe 3.2 (Alice' Münze erraten).

Problem: Alice ist im Besitz von drei Münzen u, q, r mit den folgenden Verteilungen:

$$u = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sie führt nun die folgende Sequenz von Würfen durch:

1. Sie wirft die Münze u.
2. Je nach Ergebnis wirft sie eine der anderen beiden Münzen:
   (0) wenn u das Ergebnis 0 hatte, wirft sie q;
   (1) wenn u das Ergebnis 1 hatte, wirft sie r.
3. Alice erzählt Bob das Ergebnis (0 oder 1) des zweiten Münzwurfs (aber nicht, ob es das Ergebnis von q oder r ist).

Diese Situation besteht aus *zwei* probabilistischen Bits: Alice' erster Münzwurf und Alice' zweiter Münzwurf (der auch Bob's probabilistischem Bit entspricht).

$$\frac{3}{8}[00] + \frac{1}{8}[01] + \frac{1}{6}[10] + \frac{2}{6}[11]$$

Fragen:

1. Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Würfe von Alice?
2. Was ist die Verteilung, wenn Bob sein probabilistisches Bit misst? $\frac{26}{48}[0] + \frac{22}{48}[1]$
3. Wenn Bob sein Bit misst und als Ergebnis 0 erhält, ist es dann wahrscheinlicher, dass erste Münze 0 oder 1 war? Was wenn er 1 misst? $\frac{3}{8}[00] + \frac{1}{6}[10], \frac{3}{8} > \frac{1}{6} \Rightarrow [0]$ **wahrscheinlicher**

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt:

$$\mathrm{SWAP}\,[a, b] = [b, a],$$

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt: $$\mathrm{SWAP}\,[a, b] = [b, a],$$

Mit Linearität erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{SWAP}\,\big(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\big) \\ = p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11] \\ = p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11].\end{aligned}$$

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\text{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\text{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\text{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\text{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt: $$\text{SWAP}\,[a,b] = [b,a],$$

Mit Linearität erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\text{SWAP}\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right)\\
&= p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11]\\
&= p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11].
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 3.3 (SWAP in der 4-Vektorschreibweise (optional)).

Schreibe die SWAP-Operation auf zwei probabilistischen Bits in der 4-Vektorschreibweise.

3.1.5 Die SWAP Operation

Vertauscht die beiden Bits

$$\mathrm{SWAP}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[01] = [10],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[10] = [01],$$

$$\mathrm{SWAP}\,[11] = [11].$$

oder kompakt:

$$\mathrm{SWAP}\,[a, b] = [b, a],$$

Mit Linearität erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{SWAP}\,&(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11])\\ =&p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11]\\ =&p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11].\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 3.3 (SWAP in der 4-Vektorschreibweise (optional)).

Schreibe die SWAP-Operation auf zwei probabilistischen Bits in der 4-Vektorschreibweise.

$$\mathrm{SWAP}\begin{pmatrix}p_{00}\\p_{01}\\p_{10}\\p_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{00}\\p_{10}\\p_{01}\\p_{11}\end{pmatrix}.$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

**Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen,
aber die Bits interagieren nicht.**

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit** $[1]$ **ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit** $[0]$ **ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit $[0]$ ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**
- **Das Steuerbit ändert sich nicht**

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit $[0]$ ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**
- **Das Steuerbit ändert sich nicht**

1. Bit: Steuerbit
2. Bit: Zielbit

$1 \rightarrow 2$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit $[0]$ ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**
- **Das Steuerbit ändert sich nicht**

1. Bit: Steuerbit
2. Bit: Zielbit

$1 \rightarrow 2$

$$\mathrm{CNOT}_{1\rightarrow 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\rightarrow 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\rightarrow 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\rightarrow 2}\,[11] = [10].$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit NOT und SWAP kann man einzelne Bits ändern oder zwei vertauschen, aber die Bits interagieren nicht.

Wir benötigen Operationen bei denen in Abhängigkeit von einem Bit, das andere Bit verändern.

CNOT: kontrollierte NOT Operation

- **Wenn das Steuerbit $[1]$ ist, dann wird das Zielbit geflippt (NOT)**
- **Wenn das Steuerbit $[0]$ ist, dann bleibt das Zielbit gleich (IDENTITÄT)**
- **Das Steuerbit ändert sich nicht**

1. Bit: Steuerbit
2. Bit: Zielbit

$1 \to 2$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0
Das 2. Bit im Ergebnis entspricht dieser Operation

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0
Das 2. Bit im Ergebnis entspricht dieser Operation

Formal kann man schreiben

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a, b] = [a, a \oplus b],$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0
Das 2. Bit im Ergebnis entspricht dieser Operation

Formal kann man schreiben

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a, b] = [a, a \oplus b],$$

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Man kann sich CNOT auch als Addition vorstellen

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] = [00],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] = [01],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] = [11],$$

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] = [10].$$

Die beiden Bits werden addiert
0,1,1,2
Dann modulo 2
0,1,1,0
Das 2. Bit im Ergebnis entspricht dieser Operation

Formal kann man schreiben

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a,b] = [a, a \oplus b],$$

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Die Modulo 2 Operation $\oplus$ kann man auch als XOR (exklusives Oder - Entweder oder) bezeichnen

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Übungsaufgabe 3.4 (Steuer- und Zielbit vertauschen)**.**

1. Schreibe die Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ in einer Formel wie in Gl. 3.20.
2. Wie kann man $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ durch SWAP und $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ implementieren?

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Übungsaufgabe 3.4 (Steuer- und Zielbit vertauschen)**.**

1. Schreibe die Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to1}$ in einer Formel wie in Gl. 3.20.
2. Wie kann man $\mathrm{CNOT}_{2\to1}$ durch SWAP und $\mathrm{CNOT}_{1\to2}$ implementieren?

Lösung.

1. $\mathrm{CNOT}_{2\to1}[a,b] = [a\oplus b, b] = [b\oplus a, b]$.
2. Dies kann getan werden, indem man zuerst eine SWAP-Operation ausführt, dann $\mathrm{CNOT}_{1\to2}$, und am Ende wieder SWAP. Tatsächlich, wenn wir Gl. 3.18 und 3.20 nutzen, gilt

$$\mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to2}(\mathrm{SWAP}[a,b])) = \mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to2}[b,a])$$

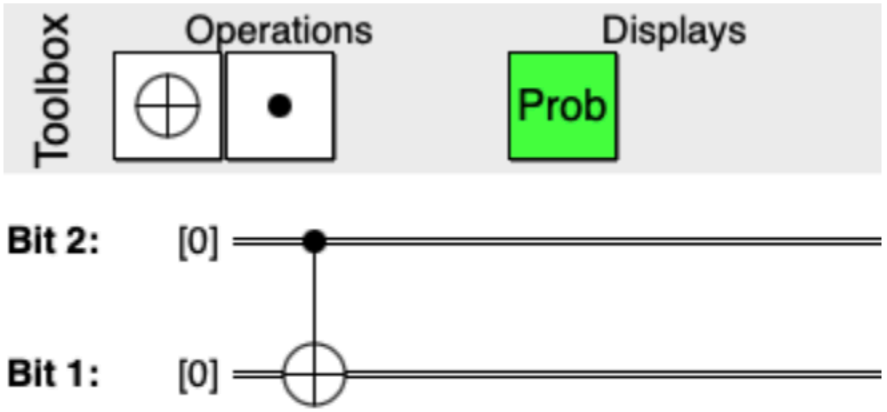
$$= \mathrm{SWAP}[b, b\oplus a] = [b\oplus a, b].$$

3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit Quirky: dot = Steuerbit; Kreuz = Zielbit

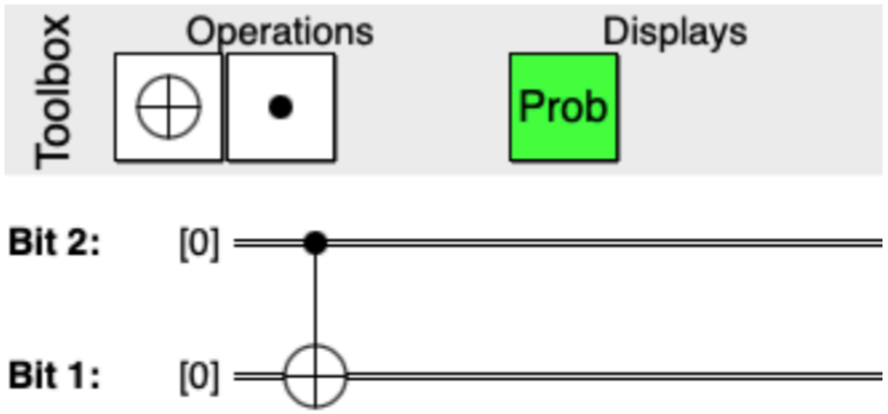
3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

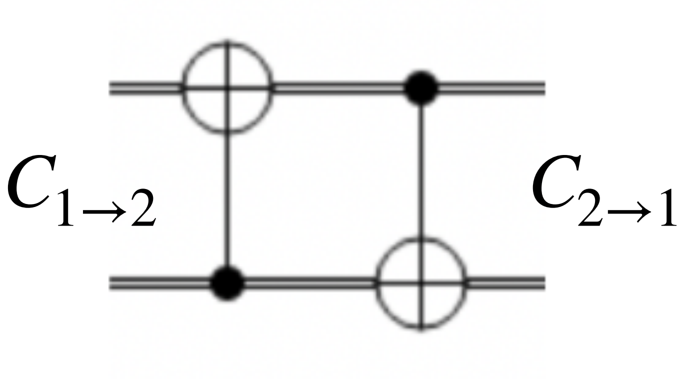
Mit Quirky: dot = Steuerbit; Kreuz = Zielbit



3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

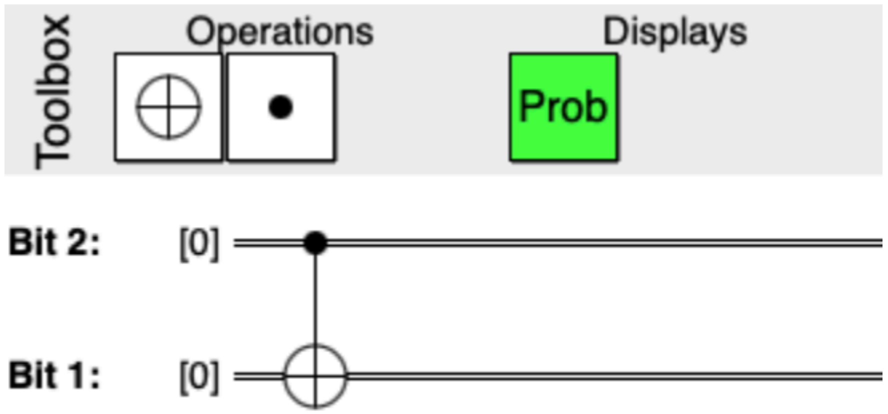
Mit Quirky: dot = Steuerbit; Kreuz = Zielbit

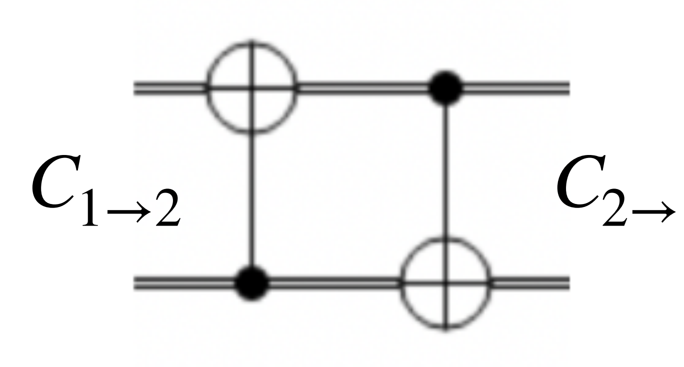




3.1.6 Die kontrollierte NOT Operation

Mit Quirky: dot = Steuerbit; Kreuz = Zielbit





Hausaufgabe 3.2 (SWAP aus CNOT's).

Problem: Es ist beinahe Mitternacht, aber Bob bastelt immer noch an dem Prototypen seines probabilistischen-Bit Computers herum, den er am nächsten Tag in der Schule vorstellen will. Er ist so beschäftigt damit, seinen Zufallszahlengenerator zu kalibreren, dass er vergisst seinen Papageien Ziggy zu füttern. Um auf sich aufmerksam zu machen, stößt Ziggy Bob's Kaffetasse um und der ganze Kaffe fließt über Bob's selbstgebastelte Tastatur, mit der er Operationen auslösen kann. Entsetzt stellt Bob fest, dass die SWAP-Taste nicht mehr funktioniert! Zum Glück ist es der CNOT-Taste besser ergangen, sie funktioniert noch immer.

Fragen: Wie kann Bob die SWAP-Operation nur durch CNOT-Operationen implementieren? (Wenn du zeigen willst, dass zwei Operationen identisch sind, musst du das dank Linearität nur für die Basiszustände zeigen.)

Hinweis: Du solltest drei CNOT-Operationen benötigen.

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11].$$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0[00] + q_0 r_1[01] + q_1 r_0[10] + q_1 r_1[11].$$

Äquivalent: $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$ **mit:** $p_{ab} = q_a r_b.$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0[00] + q_0 r_1[01] + q_1 r_0[10] + q_1 r_1[11].$$

Äquivalent: $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$ **mit:** $p_{ab} = q_a r_b.$

Besondere Eigenschaft: die beiden Bits sind unabhängig, d.h. beim Messen von einem Bit, erhält man keine Information über das andere Bit

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0[00] + q_0 r_1[01] + q_1 r_0[10] + q_1 r_1[11].$$

Äquivalent: $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$ **mit:** $p_{ab} = q_a r_b.$

Besondere Eigenschaft: die beiden Bits sind unabhängig, d.h. beim Messen von einem Bit, erhält man keine Information über das andere Bit

Übungsaufgabe 3.5 (Unabhängige Bits (optional)).

Nimm an, dass wir das erste Bit aus dem Zustand Gl. 3.22 messen und das Ergebnis als $a \in \{0,1\}$ bezeichnen. Zeige, dass der Zustand des zweiten Bit r ist, unabhängig vom Ergebnis a des ersten Bits. Mit anderen Worten, die beiden Bits zu kombinieren und das erste Bit zu messen hat den Zustand des zweiten nicht beeinflusst (was es auch nicht sollte)!

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wie erhält man 2 Bit Zustände aus Einzelbits?

Starte mit $q = q_0[0] + q_1[1]$ **und** $r = r_0[0] + r_1[1]$

Damit findet man

$$q_0 r_0[00] + q_0 r_1[01] + q_1 r_0[10] + q_1 r_1[11].$$

Äquivalent: $p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$ **mit:** $p_{ab} = q_a r_b.$

Besondere Eigenschaft: die beiden Bits sind unabhängig, d.h. beim Messen von einem Bit, erhält man keine Information über das andere Bit

Übungsaufgabe 3.5 (Unabhängige Bits (optional)).

Nimm an, dass wir das erste Bit aus dem Zustand Gl. 3.22 messen und das Ergebnis als $a \in \{0,1\}$ bezeichnen. Zeige, dass der Zustand des zweiten Bit r ist, unabhängig vom Ergebnis a des ersten Bits. Mit anderen Worten, die beiden Bits zu kombinieren und das erste Bit zu messen hat den Zustand des zweiten nicht beeinflusst (was es auch nicht sollte)!

Lösung.

Nutzen wir Abb. 3.3, so können wir den Zustand des zweiten Bits nach dem Messen berechnen als

$$\frac{p_{a0}[0] + p_{a1}[1]}{p_{a0} + p_{a1}} = \frac{q_a r_0[0] + q_a r_1[1]}{q_a r_0 + q_a r_1} = \frac{r_0[0] + r_1[1]}{r_0 + r_1} = r_0[0] + r_1[1] = r,$$

wobei wir q_a gestrichen haben und benutzt haben, dass $r_0 + r_1 = 1$.

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

Findet man $q \otimes r = \big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big)$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

Findet man

$$\begin{aligned} q \otimes r &= \left(q_0[0] + q_1[1]\right) \otimes \left(r_0[0] + r_1[1]\right) \\ &= q_0 r_0 \left([0] \otimes [0]\right) + q_0 r_1 \left([0] \otimes [1]\right) + q_1 r_0 \left([1] \otimes [0]\right) + q_1 r_1 \left([1] \otimes [1]\right) \\ &= q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11]. \end{aligned}$$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

Findet man

$$
\begin{aligned}
q \otimes r &= \big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big) \\
&= q_0 r_0 \big([0] \otimes [0]\big) + q_0 r_1 \big([0] \otimes [1]\big) + q_1 r_0 \big([1] \otimes [0]\big) + q_1 r_1 \big([1] \otimes [1]\big) \\
&= q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11].
\end{aligned}
$$

Dies war unser ursprüngliche 2 Bit Zustand von oben

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Für diese unabhängigen Zuständen führt man eine neue Notation ein, das **Tensorprodukt** $\otimes$

Ausgehend von $[0] \otimes [1] = [01].$

Findet man

$$\begin{aligned} q \otimes r &= (q_0[0] + q_1[1]) \otimes (r_0[0] + r_1[1]) \\ &= q_0 r_0 ([0] \otimes [0]) + q_0 r_1 ([0] \otimes [1]) + q_1 r_0 ([1] \otimes [0]) + q_1 r_1 ([1] \otimes [1]) \\ &= q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11]. \end{aligned}$$

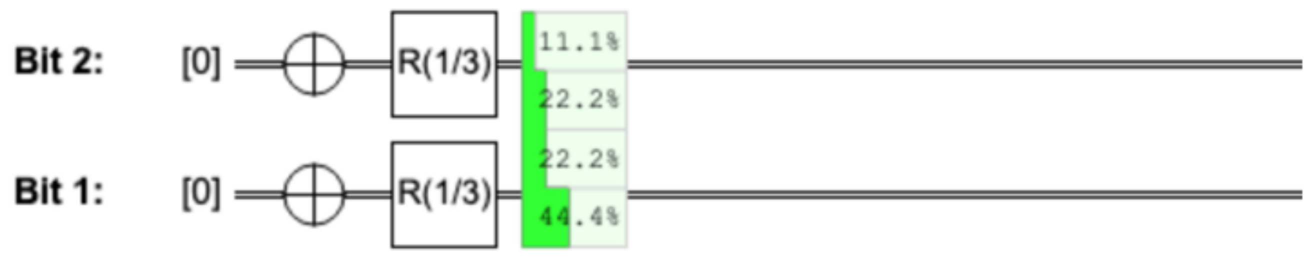
Dies war unser ursprüngliche 2 Bit Zustand von oben

In Vektornotation:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ q_1 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 r_0 \\ q_0 r_1 \\ q_1 r_0 \\ q_1 r_1 \end{pmatrix},$$

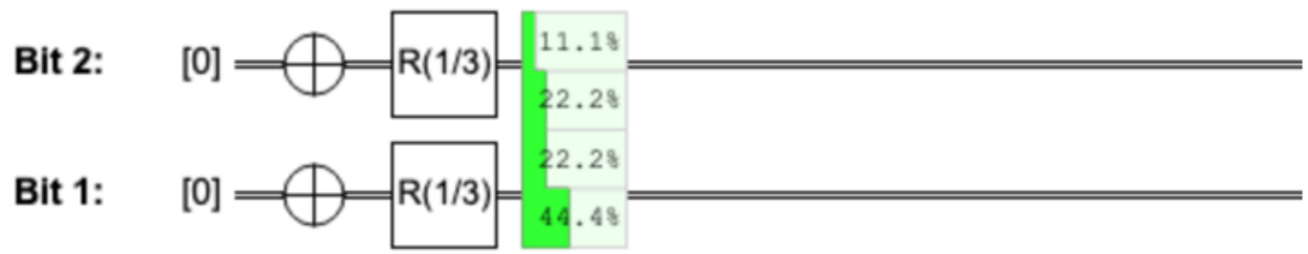
3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wir hatten vorhin



3.1.7 Produkt-Verteilungen

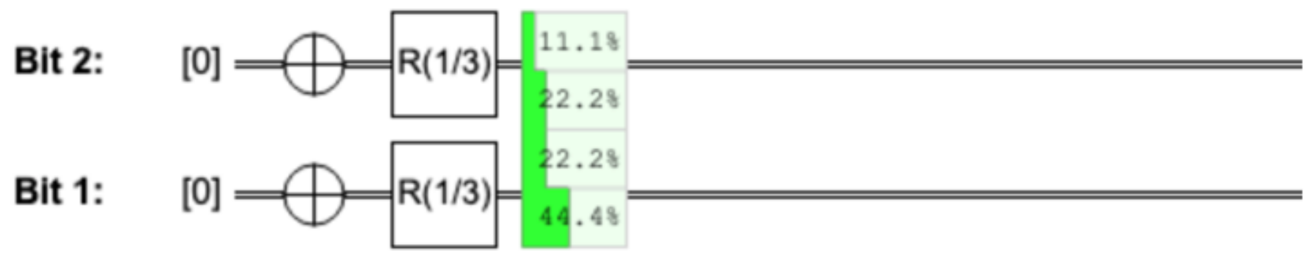
Wir hatten vorhin



$$\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) \otimes \left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) = \frac{1}{9}[00] + \frac{2}{9}[01] + \frac{2}{9}[10] + \frac{4}{9}[11] = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11.1\% \\ 22.2\% \\ 22.2\% \\ 44.4\% \end{pmatrix},$$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Wir hatten vorhin



$$\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) \otimes \left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) = \frac{1}{9}[00] + \frac{2}{9}[01] + \frac{2}{9}[10] + \frac{4}{9}[11] = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11.1\% \\ 22.2\% \\ 22.2\% \\ 44.4\% \end{pmatrix},$$

Hausaufgabe 3.3 (Das Tensorprodukt)**.**

Finde zwei probabilistische Bits q und r, sodass folgende Gleichung gilt:

$$q \otimes r = 0.48[00] + 0.32[01] + 0.12[10] + 0.08[11].$$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b].$$

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b].$$

Derartige Zustände nennt man Produkt-Zustände oder Produkt-Verteilungen

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b].$$

Derartige Zustände nennt man Produkt-Zustände oder Produkt-Verteilungen

Ist jeder 2-Bit Zustand ein Produktzustand?

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Das Tensorprodukt erlaubt kompakte Schreibweisen, z.B. von 1 Bit Operationen:

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b].$$

Derartige Zustände nennt man Produkt-Zustände oder Produkt-Verteilungen

Ist jeder 2-Bit Zustand ein Produktzustand?

Nein!

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Es gibt auch 2-Bit Zustände, die nicht Produktzustände sind,
d.h. sie können nicht als $[a] \otimes [b]$ geschrieben werden

Z.B. $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$

Derartige Zustände nennt man korreliert

Misst man das erste Bit, dann kennt man automatisch den Wert des zweiten!

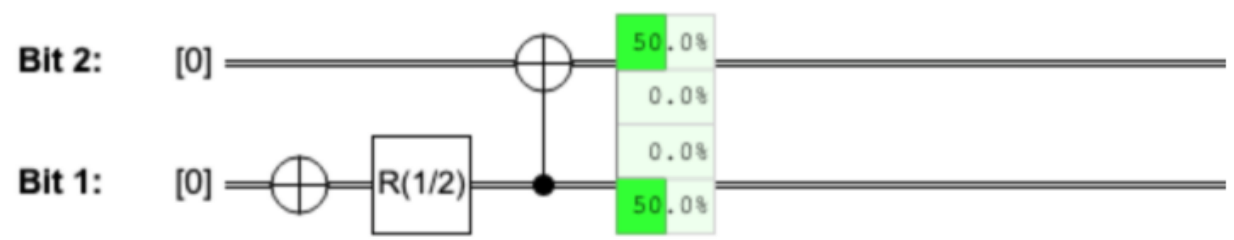
In diesem Fall: Zustand des 1. Bits = Zustand des 2. Bits (perfekt korrelierte Zustände)

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Konstruktion von $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **mit Quirky**

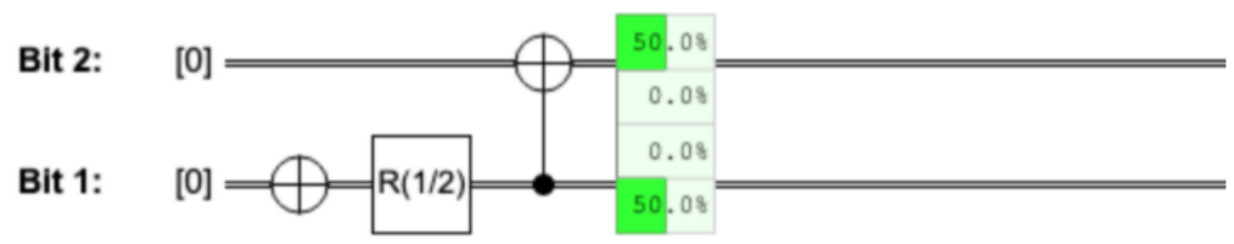
3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Konstruktion von $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **mit Quirky**



3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Konstruktion von $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ mit Quirky

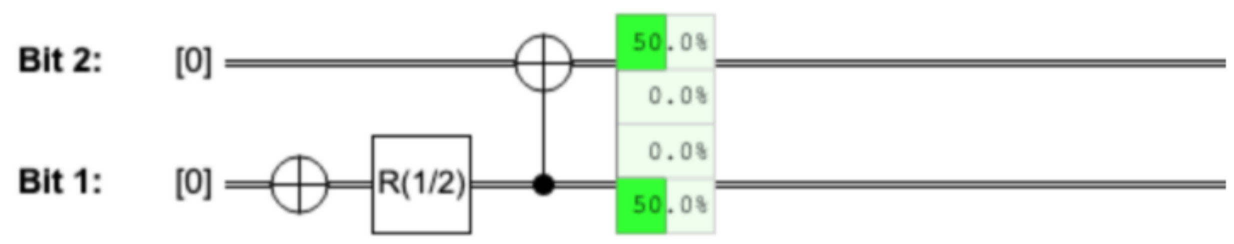


Übungsaufgabe 3.6 (Perfekt korrelierte Zufallsbits generieren)**.**

Erkläre, warum die obige Berechnung in Quirky den Zustand $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ generiert.

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Konstruktion von $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ **mit Quirky**



Übungsaufgabe 3.6 (Perfekt korrelierte Zufallsbits generieren).

Erkläre, warum die obige Berechnung in QUIRKY den Zustand $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ generiert.

Lösung.

Der Zustand vor der kontrollierten NOT-Operation ist

$$\left(\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]\right) \otimes [0] = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10].$$

Nachdem wir die kontrollierte NOT-Operation angewendet haben, erhalten wir

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10]\right) = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

Für Produkt-Zustände erhält man immer $\Delta(p) = 0$**,**
andernfalls, ist der Zustand korreliert.

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

Für Produkt-Zustände erhält man immer $\Delta(p) = 0$**, andernfalls, ist der Zustand korreliert.**

Beispiel: $\Delta\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]\right)$

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

Für Produkt-Zustände erhält man immer $\Delta(p) = 0$**,**
andernfalls, ist der Zustand korreliert.

Beispiel: $\Delta\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Test: ist ein Zustand

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

ein Produkt-Zustand oder ein korrelierter Zustand?

Berechne: $\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}$

Für Produkt-Zustände erhält man immer $\Delta(p) = 0$**,**
andernfalls, ist der Zustand korreliert.

Beispiel: $\Delta\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$

Beweis: jeder korrelierte Zustand liefert $\neq 0$
(Siehe Skript)

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

Hausaufgabe 3.4 (Unabhängigkeit impliziert Produkt (optional)).

Nimm an, dass p sich in einer beliebigen Zwei-Bit-Verteilung befindet, sodass der Zustand des zweiten Bits unabhängig vom Messergebnis des ersten Bit ist. Zeige, dass ein solches p eine Produktverteilung ist. Das schaffst du in zwei Schritten:

1. Das Messergebnis des ersten Bits kann entweder 0 oder 1 sein. Mit Abb. 3.3 kannst du die verbleibenden Zustände des zweiten Bits in beiden Fällen vergleichen und die folgenden Identitäten zeigen:

$$\frac{p_{00}}{p_{00}+p_{01}} = \frac{p_{10}}{p_{10}+p_{11}}, \qquad \frac{p_{01}}{p_{00}+p_{01}} = \frac{p_{11}}{p_{10}+p_{11}}.$$

2. Nutze diese Gleichungen sowie Gl. 3.29, um zu zeigen, dass $\Delta(p) = 0$

Quest 3: Verzaubernde Verschränkungen

In den letzten zwei Wochen haben wir darüber gesprochen, wie sich ein einzelnes probabilistisches Bit und ein einzelnes Qubit verhält. Diese Woche wirst du lernen, was passiert, wenn du zwei zur Verfügung hast. Zunächst werden wir lernen, wie sich zwei klassische Bits verhalten, welche Zustände sie haben können und wie sie *korrelieren*. Anschließend werden wir uns analog zwei Qubits anschauen und herausfinden, was es heißt, wenn diese *verschränkt* (engl. *entangled*) sind.