ZUKUNFTSENERGIEN – ZUKUNFTSMUSIK?

EIN PHYSIKSHOW-MUSICAL ÜBER ENERGIEN DER ZUKUNFT

13. DEZEMBER 2025 – 11 & 15 UHR

EMMY NOETHER CAMPUS
Hörsaal ENC D 114
Walter-Flex-Straße 3, 57072 Siegen

WEITERE INFOS UND ANMELDUNG (EMPFOHLEN AB 12 JAHREN)
www.physik-astro.uni-bonn.de/physikshow/de/termine

Gefördert durch:

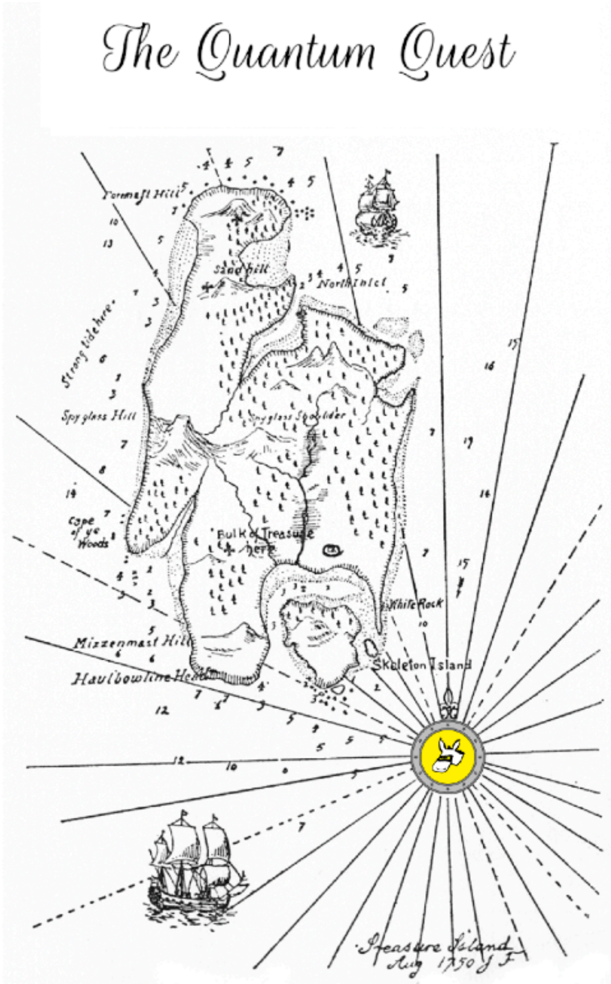
Bundesministerium für Forschung, Technologie und Raumfahrt

UNIVERSITÄT BONN

Universität Siegen

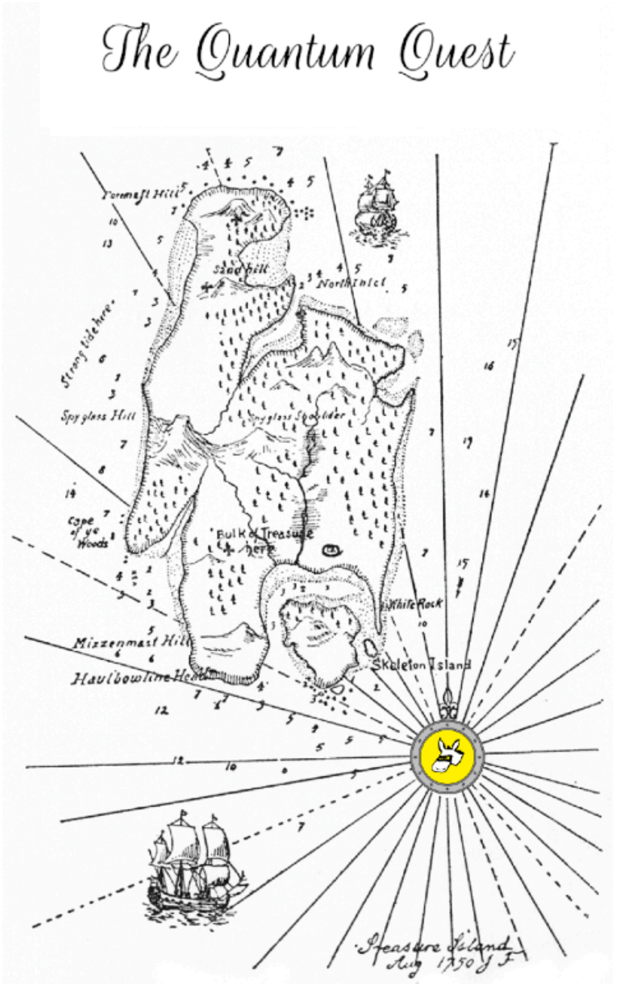
Physikshow Universität Bonn

2025 Wissenschaftsjahr ZUKUNFTS ENERGIE



Ab heute:
Quantencomputing

Mittwochsakademie/ Begabte Siegen



angelehnt an
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ziel dieser Vorlesung ist es
nicht-triviale Einblicke in die Grundprinzipien des
Quantencomputings zu geben,
sowie erste QC-Programme zu erstellen

Vorlesung: Das theoretische Minimum

Mittwochsakademie

angelehnt an

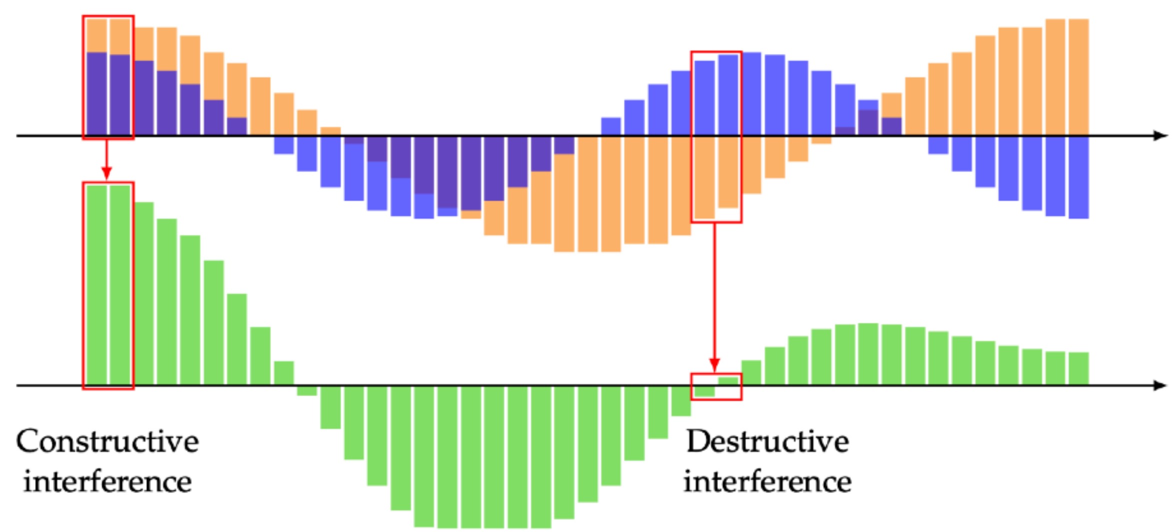
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter

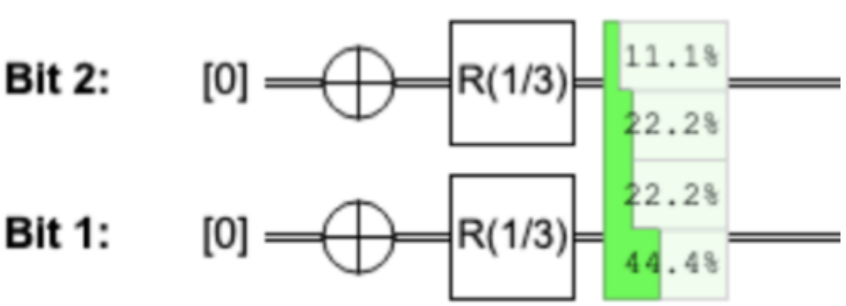
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q4a Quantenkompositionen 1
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
28. 1.: Q5a Virtuose Algorithmen 1
4. 2.: Q5b Virtuose Algorithmen 2





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1 \\
&= |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Quantum Quest

Wir befinden uns im Jahre 2058

Quantencomputer sind überall

und wir begleiten Alice und Bob

Wie immer: es gibt auch Bösewichte:
The evil hacker Eve

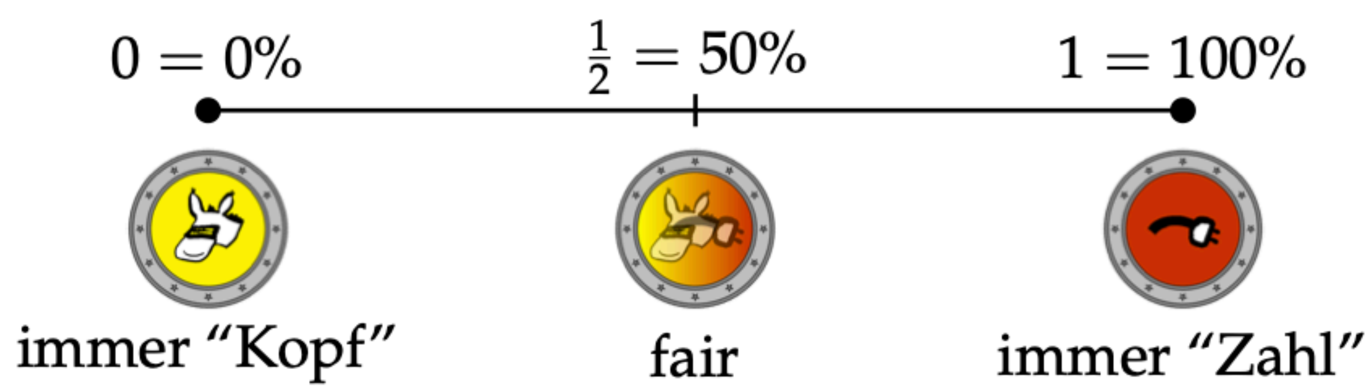
Wdh.: 1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Wahrscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

Beim Wurf einer (fairen) Münze erwarten wir gleichhäufig Kopf oder Zahl
Die Wahrscheinlichkeiten betragen dann Kopf: 0.5 bzw. 50%, Zahl 0.5 bzw. 50%

Münzen könnten aber auch unfair (biased) sein



Wahrscheinlichkeit für Zahl

Eselkopf

Eselschwanz Tail

Wdh.: 1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_0

Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_1

Probabilistisches Bit

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \frac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ **Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.** Vektornotation erlaubt graphische Darstellung und zeigt Parallelen zu Q-Bits auf
- **Zustände mit** $p_0 = 1$ **oder** $p_1 = 1$ **nennen wir deterministisch**

$$[0] := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad [1] := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

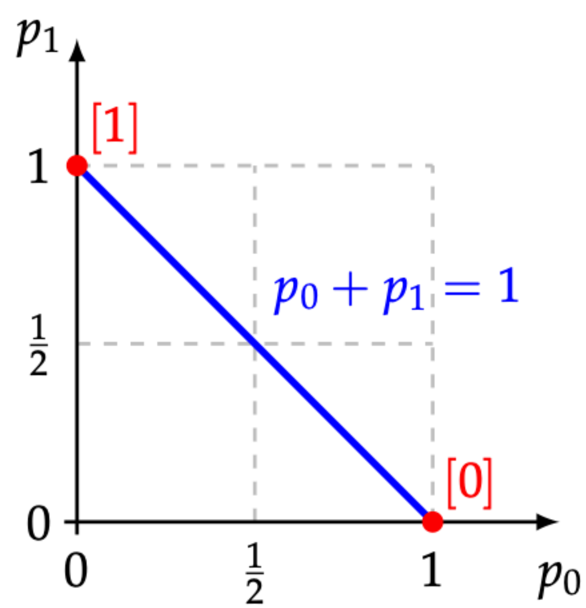
Immer Kopf **Immer Zahl**

Wdh.: 1.1 Probabilistische Bits

- **Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände, d.h. jede beliebige Zustand kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden**

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Im 2-dimensionalen kann dieser Vektor dargestellt werden



Übungsaufgabe 1.1: Die blaue Strecke verstehen

Laut Abb. 1.2 bilden die möglichen Zustände eines probabilistischen Bits eine Strecke. Nimm dir etwas Zeit, um darüber nachzudenken, und versuche, folgende Fragen zu beantworten:

1. Warum liegen alle möglichen Zustände auf einer Strecke?
2. Warum hört die Strecke an den Koordinatenachsen auf und geht nicht weiter?
3. Welcher Punkt auf der Strecke entspricht einer fairen Münze?

Wdh.: 1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

Die Wahrscheinlichkeit für beide Male Kopf lautet: $p_{00} = a_0 b_0$

(es gilt: $p_{00} \leq a_0, \; p_{00} \leq b_0$)

Allgemeiner finden wir: $p_{ij} = a_i b_j$ **mit i,j, = 0,1**

1. Münze ergibt i **und 2. Münze ergibt** j

2 Ereignisse heissen unabhängig wenn das Eintreten eines Ereignisses Nichts über das andere Ereignis aussagt: Beispiel ist Münzwurf

Wenn wir wissen wollen, ob zwei unabhängige Ereignisse gleichzeitig eingetreten sind, multiplizieren wir die Einzelwahrscheinlichkeiten

Wdh.: 1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?
4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1) $\frac{1}{60}$ **2) 00,10,20,30,40,50:** $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ **3) 00,01,02,…,09:** $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

4) 1. Ziffer 0 und 2. Ziffer 0: $\frac{1}{10}\frac{1}{6} = \frac{1}{60}$

Wdh.: 1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte wieder den Wurf von 2 Münzen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen?
Kopf-kopf oder Zahl-Zahl

$$p_{\text{Gleich}} = p_{00} + p_{11} = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

Übungsaufgabe 1.3: Wahrscheinlichkeiten addieren

Bob sitzt ebenfalls gelangweilt im Mathematikunterricht. Ihm fällt auf, dass Alice auf ihre Uhr starrt – also wirft er auch einen Blick auf seine Uhr. Zu seiner Überraschung zeigt der Sekundenzeiger 44, was Bob unwahrscheinlich erscheint. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ziffern des Sekundenzeigers dieselben sind, wenn Bob zu einem zufälligen Zeitpunkt einer Minute auf seine Uhr schaut?

00,11,22,33,44,55: $p = \dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

Wdh.: 1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Hausaufgabe 1.1: Gegenteilige Münzen

Alice wirft zwei Münzen a und b mit den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$a = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen die beiden Münzen auf *unterschiedlichen* Seiten?

$$p_{01} + p_{10} = \frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

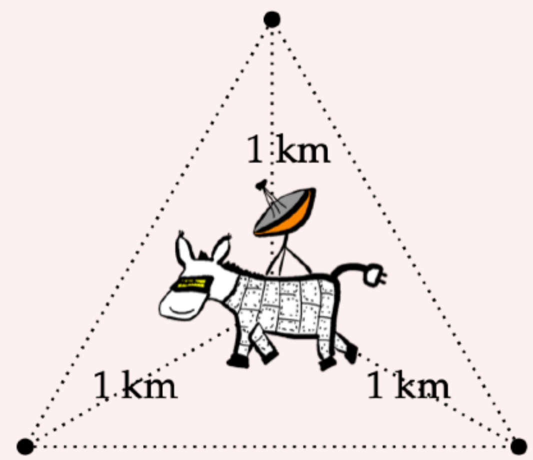
Wdh.: 1.1.3 Wahrscheinlichkeiten und Berechnungen

Welchen Nutzen hat ein probabilistisches Bit? Normales Bit mit definitiv 0 oder 1 besser?

Hausaufgabe 1.2: Alice' Esel

Das Problem: Alice will ihren Eselsroboter so programmieren, dass er alleine zu einer Ladestation laufen kann, um sich dort aufzuladen. Es gibt drei Ladestationen in der Nähe. Sie sind alle jeweils 1 km vom Roboter entfernt und bilden ein gleichseitiges Dreieck – mit dem Esel in der Mitte. Der Roboter hat noch genügend Akku, um 2,8 km zu laufen.

Alice wird das Programm, welches den Roboter die Ladestation aussuchen lässt, per WiFi auf ihn hochladen. Sie weiß aber, dass ihre böse Klassenkameradin Eve sie sabotieren will. Da Eve das WiFi überwacht, kann sie den Programmcode mitlesen. Damit Eve nicht sehen kann, wohin der Esel läuft, schaltet Alice das WiFi des Roboters aus, sobald das Programm hochgeladen ist. Solange der Esel dann läuft, kann Eve ihn also nur sabotieren, indem sie Ladestationen hackt und deaktiviert. Sie kann allerdings nur zwei der drei Ladestationen deaktivieren, bevor sie entdeckt wird. Da Eve nicht sehen kann, wohin der Roboter läuft, muss sie sich also nur auf Grund von Alice' Programm entscheiden, welche zwei Ladestationen sie deaktivieren will.



Fragen:

1. Wie viele Ladestationen kann der Esel besuchen, bevor seine Batterie leer ist?
2. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass er die Ladestationen in einer festgelegten Reihenfolge besucht. Kann Eve verhindern, dass der Roboter eine funktionierende Station erreicht? Bedenke, dass Eve Alice' Programmcode mitlesen kann. Sie weiß also, in welcher Reihenfolge der Esel die Stationen ablaufen wird.
3. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass dieser selbst zufällig entscheiden kann, wo er hinwill. (Eve kann zwar sehen, was Alice programmiert hat, kann aber nicht vorhersehen, welche Entscheidungen der Esel trifft, sobald er anfängt loszulaufen.) Was für eine Strategie sollte Alice dem Esel einprogrammieren, und wie sollte Eve auswählen, welche Stationen sie deaktiviert, um dem entgegen zu wirken? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Esel eine funktionierende Ladestation erreichen, falls sowohl Alice als auch Eve bestmögliche Strategien verwenden?

Q1: Pythagoras:

Seitenlänge $= \sqrt{3} \approx 1.73$

d.h. 2 Ladestationen

Q2: Nein

Q3: Alice

1. Weg mit Prob. $\frac{1}{3}$

L/R mit Prob. $\frac{1}{2}$

Eve: Zufällig

1. Station mit Prob. $\frac{1}{3}$ gut,

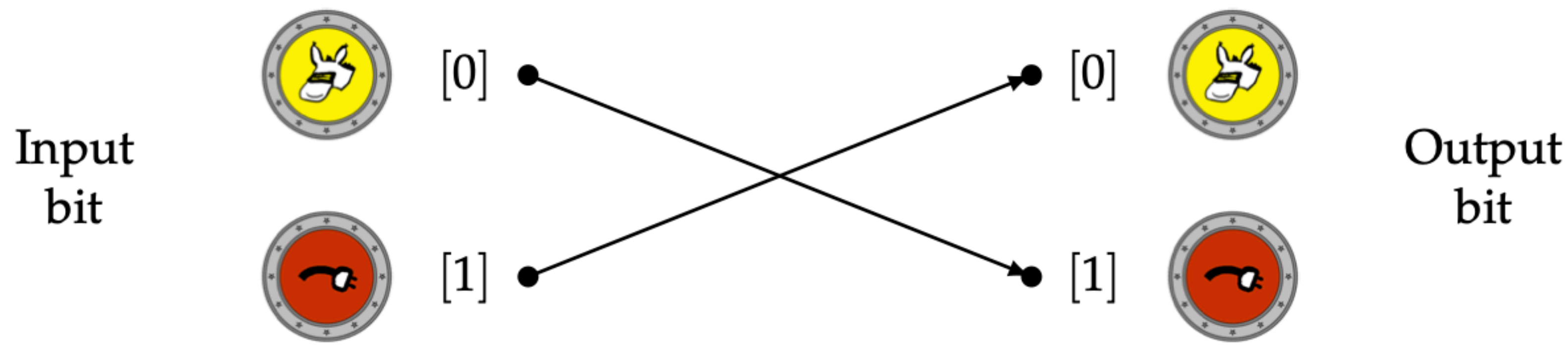
wenn kaputt (Prob. $\frac{2}{3}$), dann

ist 2. Station mit Prob. $\frac{1}{2}$ gut

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \approx 66\,\%$$

Wdh.: 1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Kopf und Zahl vertauschen:



Wird als NOT-Operation bezeichnet:

$$\mathrm{NOT}\,[0] = [1], \qquad \mathrm{NOT}\,[1] = [0].$$

$$\mathrm{NOT}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

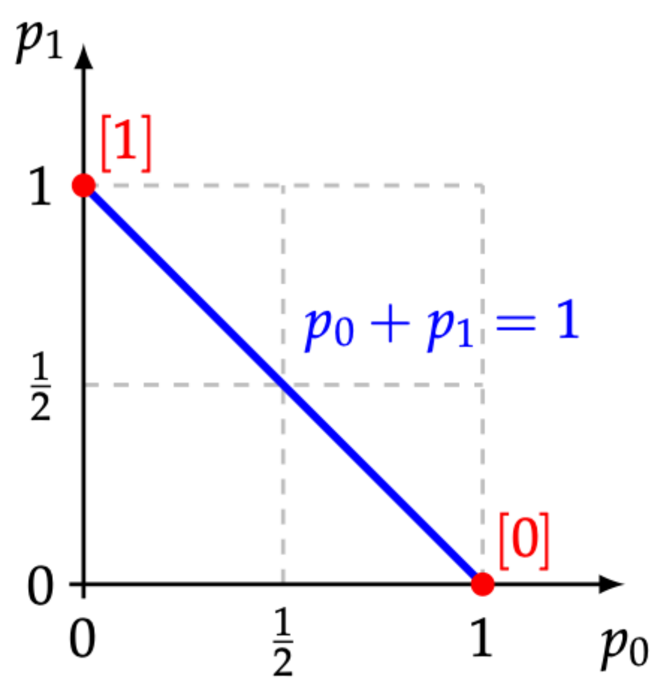
Wdh.: 1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Übungsaufgabe 1.4: Die NOT Operation visualiseren

Wie wir in Abb. 1.2 gesehen haben, liegen alle möglichen Zustände eines probabilistischen Bits auf einer Strecke. Lass uns also versuchen zu verstehen, wie die NOT Operation diese Strecke transformiert oder verändert.

1. Such dir einen beliebigen[a] (engl. *arbitrary*) Punkt auf der Strecke mit Koordinaten (p_0, p_1). Wo landet dieser Punkt nachdem du die NOT Operation auf ihn angewandt hast?
2. Was passiert mit den zwei Endpunkten der Strecke?
3. Gibt es einen Punkt auf der Strecke, der auf sich selbst abgebildet wird?

[a] Hier bedeutet 'beliebig', dass deine Berechnungen für *jeden möglichen* Punkt gelten muss. Am einfachsten ist es meist, die Werte p_0 und p_1 bis zum Ende als unbekannte Zahlen zu behandeln.



Wdh.: 1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0**
$\hat{M}[1]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 1**

Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit im Zustand 0 und wir erhalten $\hat{M}[0]$
Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit im Zustand 1 und wir erhalten $\hat{M}[1]$

Daher fordern wir

$$\hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \hat{M}[0] + p_1 \hat{M}[1]$$

Übungsaufgabe 1.5: NOT auf probabilistischen Bits

Zeige, dass Gl. (1.11) zu Gl. (1.10) führt, wenn M die NOT Operation ist.

$$\hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \hat{M}[0] + p_1 \hat{M}[1] \qquad \text{NOT} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

Wdh.: 1.2.1 Erweitern durch Linearität

Wir können auch schreiben

$$\hat{M}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \hat{M}\left(p_0[0] + p_1[1]\right) = p_0\hat{M}[0] + p_1\hat{M}[1]$$

Mathematisch definiert dies

eine lineare Abbildung $\hat{M}$ im Raum der 2-er Vektoren $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

Wdh.: 1.2.2 Zufällige Operationen

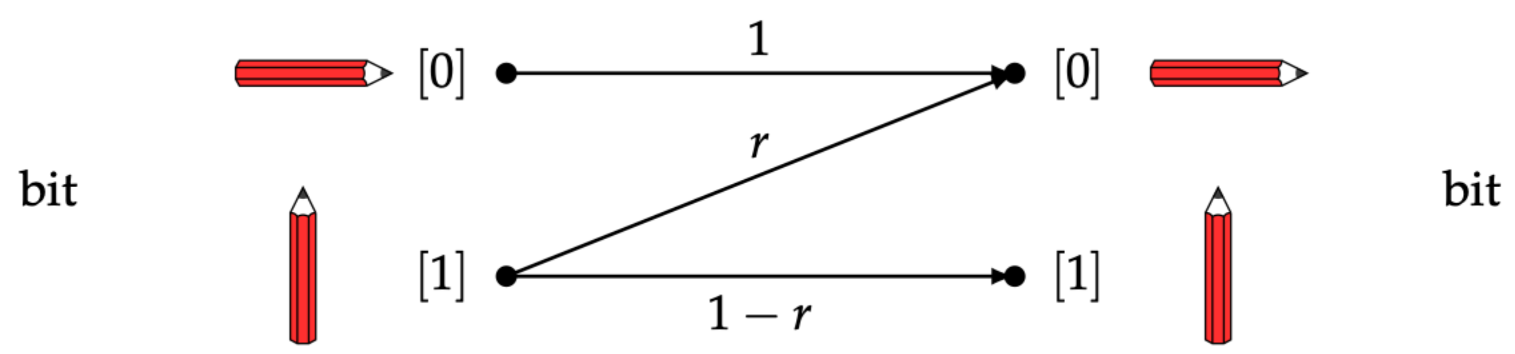
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

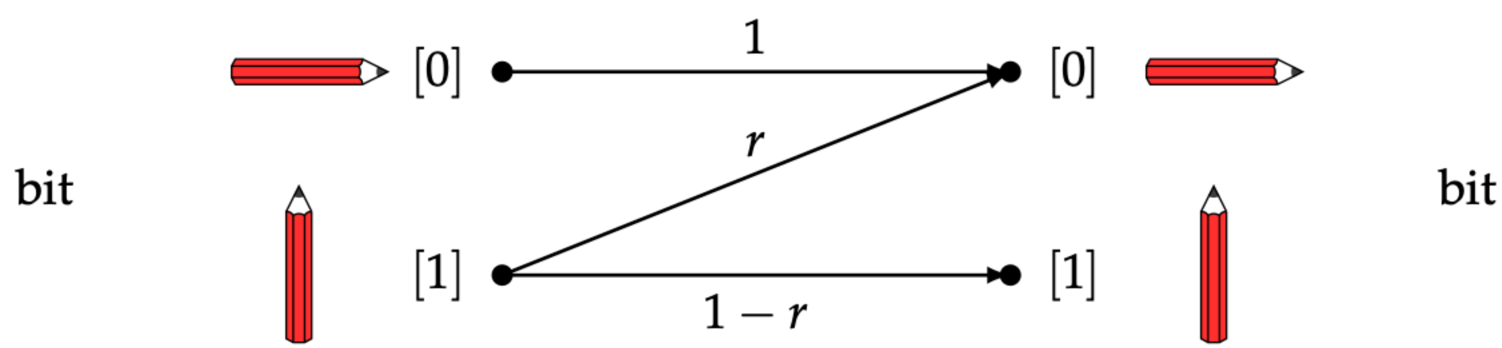
$[0]$: **Bleistift bleibt flach liegen**

$[1]$: **Bleistift fällt mit Wahrscheinlichkeit r um,**
bleibt mit Wahrscheinlichkeit $1-r$ stehen

r **hängt von der Stärke des Schlages ab**

Wdh.: 1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

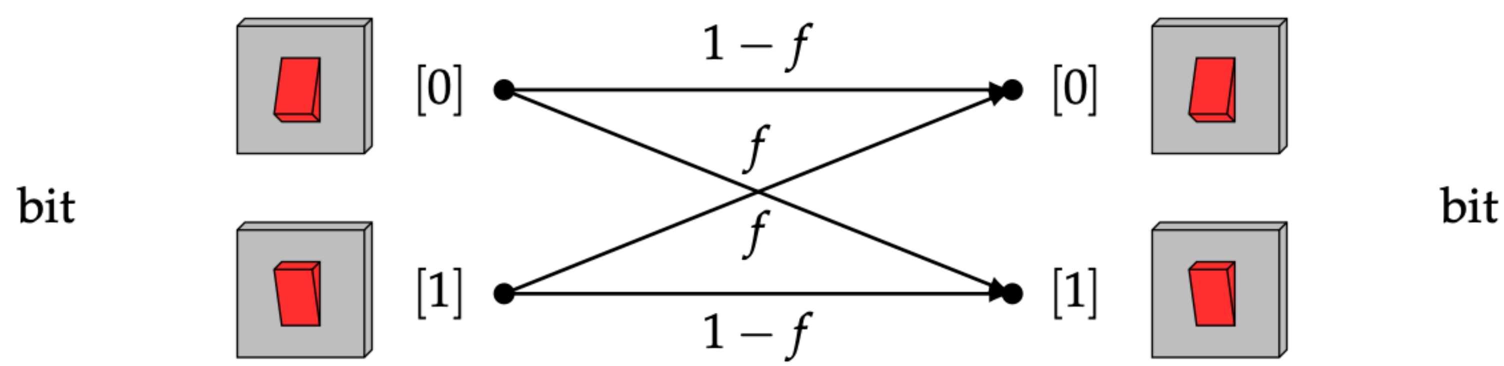
$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\hat{R}(r)[0] + p_1\hat{R}(r)[1] \quad = p_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 r \\ p_1(1-r) \end{pmatrix}$$

Betrachte die Sonderfälle $r = 0$ **und r = 1**

Wdh.: 1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: probabilistischer Flip $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ passiert nichts



$$\hat{F}(f)[0] = (1-f)[0] + f[1]. \quad \hat{F}(f)[1] = f[0] + (1-f)[1]$$

Anschaulich: Kissen auf Lichtschalter werfen - mit Wahrscheinlichkeit f getroffen und Licht geht an….

Matrix für probabilistischen Flip $\hat{F}(f)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-f)a + fb \\ (1-f)b + fa \end{pmatrix}$

Wdh.: 1.2.2 Zufällige Operationen

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.
2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\binom{p}{1-p}$ versetzen?
3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\binom{p_0}{p_1}$ berechnest.
4. Sei $\binom{p_0}{p_1}$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\binom{p_0}{p_1} = \binom{1/2}{1/2}$ gilt.

$\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$ **führt immer zur Gleichverteilung - so kann man einen fairen Münzwurf simulieren**

Übungsaufgabe 1.7: Flip durch Reset und NOT

Wie kannst du $F(f)$ aus den $R(r)$ und NOT Operationen bauen?

$$\hat{R}(1-f)\,\widehat{\textbf{NOT}}\,\hat{R}\left(\frac{1-f}{f}\right)$$

Wdh.: 1.2.2 Zufällige Operationen

Hausaufgabe 1.3: Schokoladenmünzen

Es ist der 15. Mai und Bob feiert Geburtstag! Da er Schokolade liebt, hat Alice sich entschlossen, ihm eine Schokoladenmünze zu machen. Damit die Münze ganz besonders ist, hat sie die Münze so geformt, dass sie genau mit der Wahrscheinlichkeit $q = 5/15$, die seinem Geburtstag entspricht, auf landet, wenn man sie zuvor kreiseln lässt. Nach langem ausprobieren hat sie endlich genau die richtige Form gefunden. Aufgeregt lässt sie die Münze auf dem Tisch liegen, um eine Geburtstagskarte zu kaufen.

Als sie zurückkommt, muss sie leider feststellen, dass die Münze in der Sonne lag und eine Kante ein wenig angeschmolzen ist. Durch ausprobieren stellt sie fest, dass die neue Wahrscheinlichkeit von jetzt $p = 4/15$ ist. Leider hat sie keine Zeit mehr um eine neue Münze zu machen, also schreibt sie in die Geburtstagskarte, dass Bob die Münze nach dem Kreiseln mit Wahrscheinlichkeit f einfach umdrehen soll, damit genau mit Wahrscheinlichkeit q eintritt. Hilf Alice herauszufinden, welchen Wert f haben sollte.

Hinweis: Die Werte p, q und f sollten folgende Gleichung erfüllen: $F(f)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{15} \\ \frac{10}{15} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}(f)\begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-f)\frac{4}{15} + f\frac{11}{15} \\ (1-f)\frac{11}{15} + f\frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+7f}{15} \\ \frac{11-7f}{15} \end{pmatrix} \Rightarrow f = \frac{1}{7}$$

Wdh.: 1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

 $= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”, so ändert sich der Zustand zu

 $= [0]$

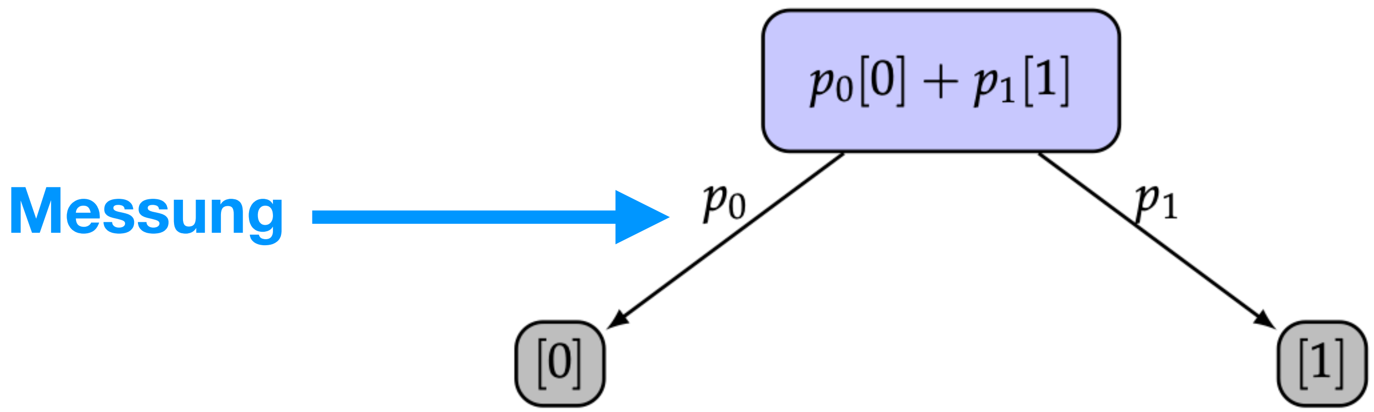
Das Handheben ist eine Messung
Die Messung ändert den Zustand: legt man die Hand wieder über die Münze, dann bleibt der Zustand

 $= [0]$

Auch bei einer weiteren Messung bleibt der Zustand

Wdh.: 1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ **liefert mit der Wahrscheinlichkeit** p_0 **das Ergebnis** $[0]$ **und mit der Wahrscheinlichkeit** p_1 **das Ergebnis** $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **oder** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**
- **Die Messung liefert nicht die Werte** p_0 **und** p_1
- **hierzu muss man das System oft (**N**-mal) kopieren und dann an jedem der vielen Systeme die Messung machen und man erhält** N_0**-mal das Ergebnis** $[0]$ **und** N_1 **-mal das Ergebnis** $[1]$**. Es gilt dann** $p_0 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_0}{N}$ **und** $p_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N_1}{N}$

Wdh.: 1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Hausaufgabe 1.4: Münzen werfen

1. Nimm dir eine Münze und markiere die Seiten mit 0 und 1. Wirf die Münze 30 mal und dokumentiere die Ergebnisse in einer Tabelle der folgenden Form:

Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	1	...	1

(Die grauen Ergebnisse sind nur Beispiele, ersetze sie mit deinen Ergebnissen.)

2. Schätze mit Gl. (1.19) die Wahrscheinlichkeit, mit der deine Münze auf der mit 1 markierten Seite landet.

3. Es ist interessant zu sehen, wie sich diese Schätzung verändert, je höher die Zahl der Würfe N steigt. Um das anschaulich zu machen, erweitere deine Tabelle aus Aufgabe 1 um drei weitere Zeilen, sodass sie wie folgt aussieht:

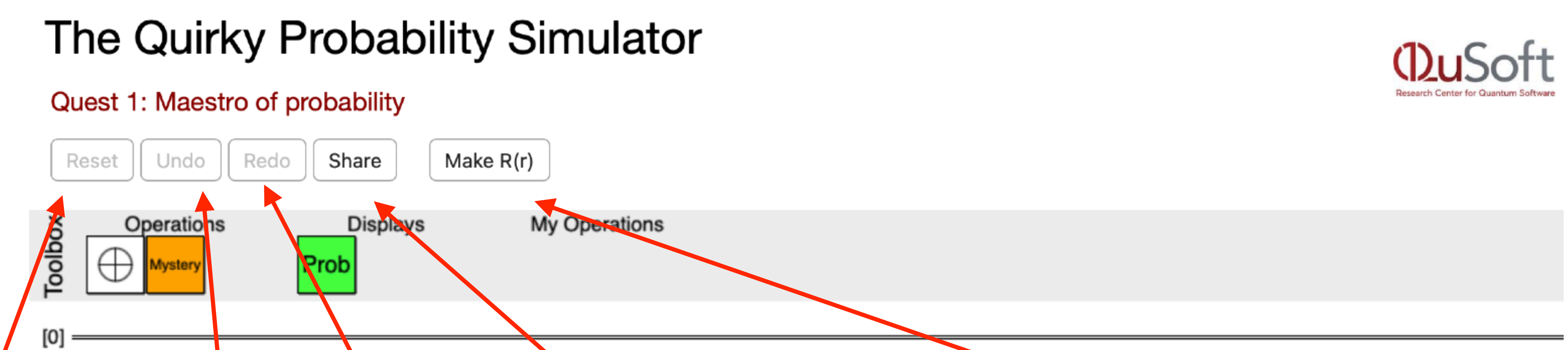
Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	...	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	...	1
Summe N_1	1	1	2	2	2	2	3	4	...	16
Anteil N_1/N	1	1/2	2/3	2/4	2/5	2/6	3/7	4/8	...	16/30
Wert des Bruchs	1.00	0.50	0.67	0.50	0.40	0.33	0.43	0.50	...	0.53

Die Zeilen haben dann folgende Bedeutung: (1) Anzahl N der Würfe bisher, (2) Ergebnis des N-ten Wurfs, (3) Summe der ersten N Würfe, (4) Schätzung der Wahrscheinlichkeit für Ergebnis 1 basiert auf den ersten N Messungen, (5) Dezimaldarstellung der Schätzung. Wenn du möchtest, kannst du *Excel* oder ein ähnliches Programm nutzen

4. Zeichne einen Graphen der letzte Zeile der Tabelle als eine Funktion der Anzahl der Würfe N.

Wdh.: 1.4 Der Quirky Simulator

`https://www.quantum-quest.org/quirky`



Erstellt die Operation $\hat{R}(r)$

Man muss r eingeben

Zurücksetzen

Änderung Rückgängig

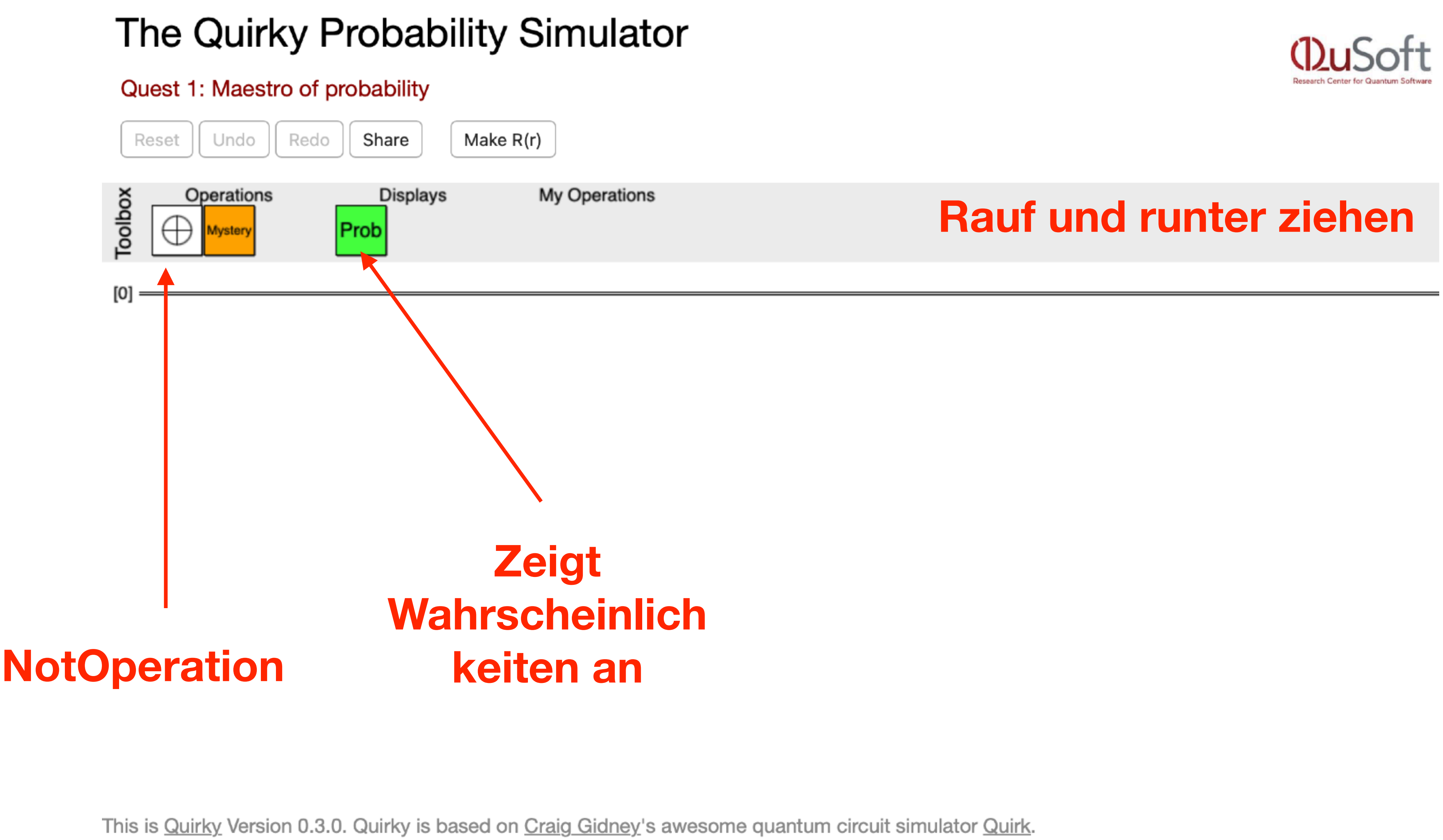
Teilen mit anderen

Änderung wiederherstellen

This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

Wdh.: 1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Wdh.: 1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky

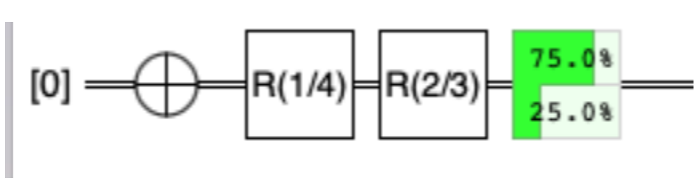
Estelle $\hat{R}(1/2)$
Was kommt dabei raus?

$$R(1/2)\,[1] = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 1.5: Zweimal Resetten

1. Baue die folgende Sequenz von Operationen in QUIRKY: Generiere zuerst den Zustand [1], resette dann mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{1}{4}$ und resette anschließend mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{2}{3}$. Nutze das Tool zum Anzeigen von Wahrscheinlichkeiten um die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse herauszufinden.

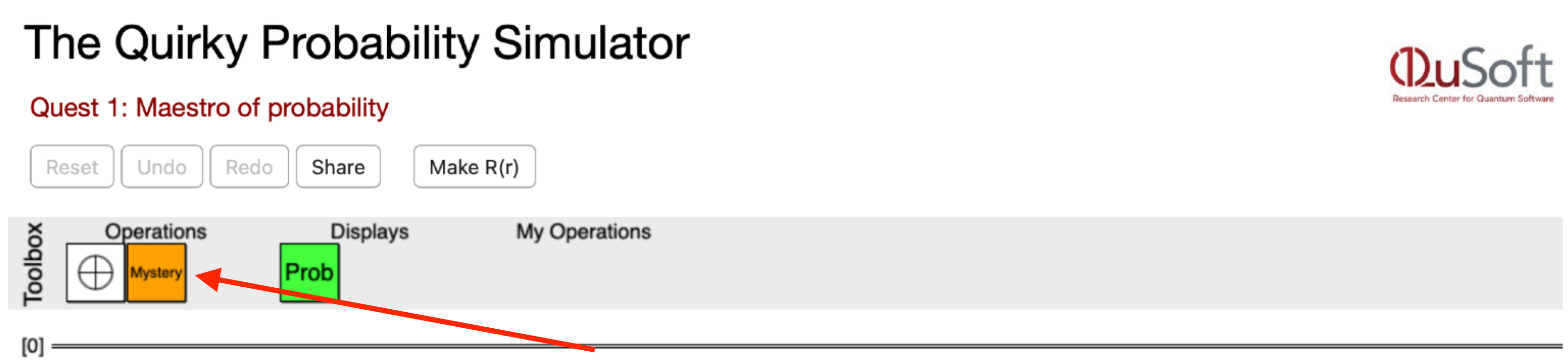
2. Zeige, dass die Antwort aus QUIRKY korrekt ist.



$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 r \\ p_1(1-r) \end{pmatrix} \qquad \hat{R}\left(\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \hat{R}\left(\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

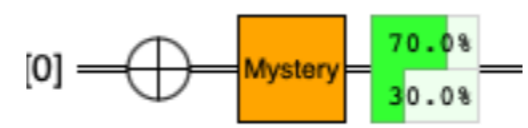
Wdh.: 1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Was macht die Mystery-Operation?

$$M[0] = 0.2[0] + 0.8[1]$$



$$M[1] = 0.7[0] + 0.3[1]$$

Hausaufgabe 1.6: Zeit für ein Mysterium

1. Bestimme den Zustand $M[1]$
2. Bestimmen $M[0]$ und $M[1]$ die zufällige Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für $M\binom{1/2}{1/2}$ auf und überprüfe sie mit QUIRKY. Falls nicht, erkläre wieso.

$$M\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0.2a + 0.7b \\ 0.8a + 0.3b \end{pmatrix} \qquad M\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

Quest 2: Das Qubit bezwingen

Da du nun Wahrscheinlichkeiten und probabilistische Bits beherrschst, bist du bereit, etwas über Quantenbits zu lernen. Quantenbits sind den probabilistischen Bits sehr ähnlich, tatsächlich musst du nur Wahrscheinlichkeiten durch Quanten-Amplituden ersetzen. Deine dieswöchige Quest wird dir alles wichtige über die Zustände eines Qubit, erlaubte Operationen auf einem Qubit und das Messen eines Qubits beibringen. Außerdem wirst du die neue *Quanten*-variante von QUIRKY ausprobieren können.

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers
Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers
Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann
Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik
Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers
Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann
Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik
Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:
Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, der nach oben oder nach unten oder nach einer Kombination (Superposition) aus oben oder unten zeigen kann!

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, der nach oben oder nach unten oder nach einer Kombination (Superposition) aus oben oder unten zeigen kann!

$$[0],\ [1],\ \frac{1}{\sqrt{2}}[0] + \frac{1}{\sqrt{2}}[1], \ldots..$$

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, der nach oben oder nach unten oder nach einer Kombination (Superposition) aus oben oder unten zeigen kann!

$$[0], [1], \frac{1}{\sqrt{2}}[0] + \frac{1}{\sqrt{2}}[1], \ldots..$$

Dieses QuantenBit - QuBit ähnelt einem probabilistischem Bit - es gibt aber auch Unterschiede

2.1 Quantenbits

Bit: Informationseinheit eines klassischen Computers

Realisierung: physikalisches System mit 2 Zuständen, die man zuverlässig unterscheiden kann

Beispiel: Münze -> beschrieben durch Mechanik

Kondensator -> beschrieben durch Elektromagnetismus

Für sehr kleine Objekte - atomare Skala - gelten Mechanik oder Elektromagnetismus nicht mehr, und wir benötigen neue Theorien:

Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik

Hier gibt es auch Systeme mit zwei möglichen Zuständen, z.B. der Spin eines Elektrons - eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, der nach oben oder nach unten oder nach einer Kombination (Superposition) aus oben oder unten zeigen kann!

$$[0], [1], \frac{1}{\sqrt{2}}[0] + \frac{1}{\sqrt{2}}[1], \ldots..$$

Dieses QuantenBit - QuBit ähnelt einem probabilistischem Bit - es gibt aber auch Unterschiede

Wir diskutieren hier nur was man damit machen kann, nicht:

Was ist der Hintergrund (Quantenmechanik)?

Wie baut man sowas?

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

Der allgemeine Zustand eines QuBits $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) dieser beiden Zustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$$

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

Der allgemeine Zustand eines QuBits $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) dieser beiden Zustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$$

Vergleiche das probabilistische Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

Der allgemeine Zustand eines QuBits $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) dieser beiden Zustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$$

Vergleiche das probabilistische Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ wurden durch die Amplituden $\psi_{0,1}$ ersetzt

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

QuBits ähneln probabilistischem Bit - es gibt zwei große Unterschiede:

1. **Wahrscheinlichlkeiten werden durch *Amplituden* ersetzt (**können auch negativ oder komplex sein!**)**
2. **Amplituden werden während dem Messen quadriert (**Wahrscheinlichkeiten nicht**)**

Die beiden möglichen Zustände eines QuBits werden $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt.

Der allgemeine Zustand eines QuBits $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination (Superposition) dieser beiden Zustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$$

Vergleiche das probabilistische Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ wurden durch die Amplituden $\psi_{0,1}$ ersetzt

Die Basiszustände $[0]\,,[1]$ durch $|0\rangle\,,|1\rangle$

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ **gilt**

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ gilt

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ gilt

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **und somit** $\psi_{0,1} \in [-1,1]$ **(können negativ sein)**

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ **gilt**

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ **gilt**

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **und somit** $\psi_{0,1} \in [-1,1]$ **(können negativ sein)**

Die QuBitzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ **können auch durch Vektoren dargestellt werden**

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ **gilt**

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ **gilt**

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **und somit** $\psi_{0,1} \in [-1,1]$ **(können negativ sein)**

Die QuBitzustände $|0\rangle, |1\rangle$ **können auch durch Vektoren dargestellt werden**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{0,1}$ **gilt**

$p_{0,1} \geq 0$ **und** $p_0 + p_1 = 1$ **und somit** $p_{0,1} \in [0,1]$

Für die Amplituden $\psi_{0,1}$ **gilt**

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **und somit** $\psi_{0,1} \in [-1,1]$ **(können negativ sein)**

Die QuBitzustände $|\,0\rangle\,,|\,1\rangle$ **können auch durch Vektoren dargestellt werden**

$$|\,0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

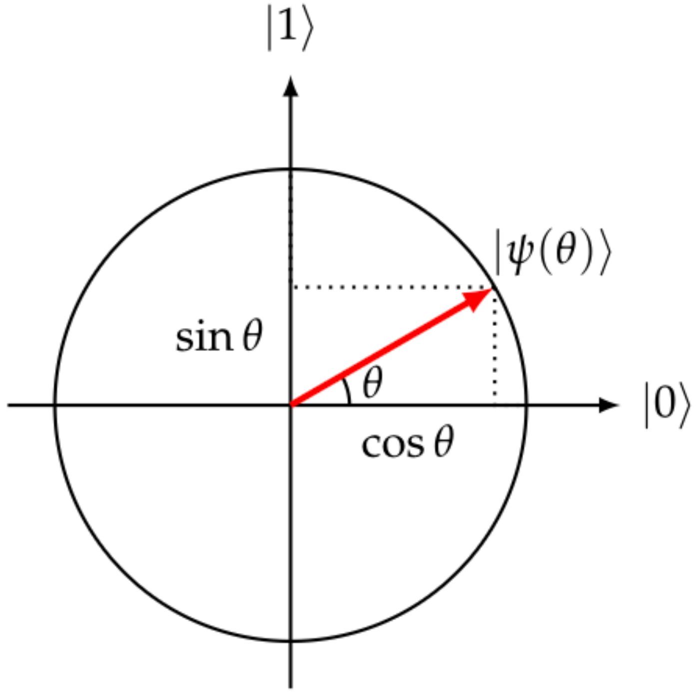
$$|\,\psi\rangle = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**

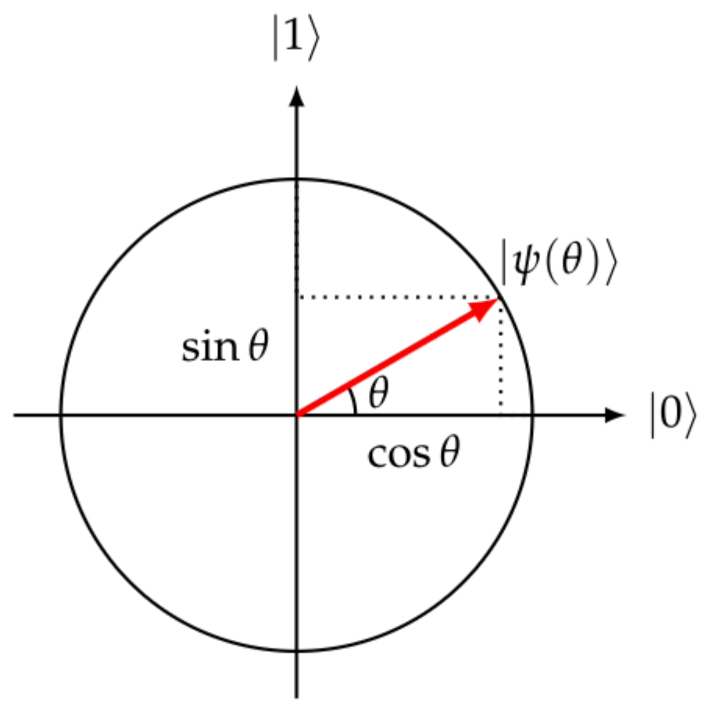
2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**



2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**

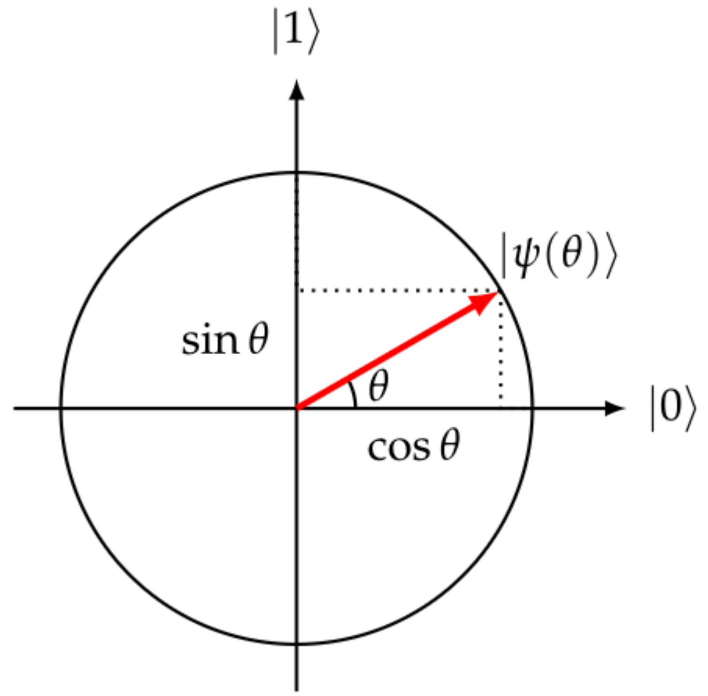


Damit können wir die Amplituden wie folgt parametrisieren

$$\psi_0 = \cos\theta\,, \psi_1 = \sin\theta$$

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ **ist in der** $\psi_0 - \psi_1$ **Ebene ein Kreis mit Radius 1**



Damit können wir die Amplituden wie folgt parametrisieren

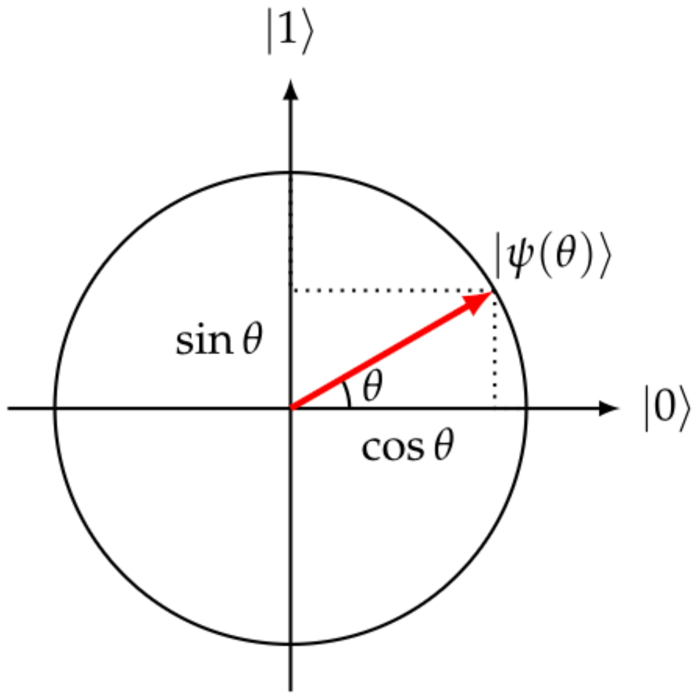
$$\psi_0 = \cos\theta\,, \psi_1 = \sin\theta$$

Ein allgemeiner Zustand lautet dann

$$|\psi(\theta)\rangle = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ ist in der $\psi_0 - \psi_1$ Ebene ein Kreis mit Radius 1



Damit können wir die Amplituden wie folgt parametrisieren

$$\psi_0 = \cos\theta\,, \psi_1 = \sin\theta$$

Ein allgemeiner Zustand lautet dann

$$|\psi(\theta)\rangle = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

Die möglichen Zustände eines QuBits liegen auf einem Kreis,
während die möglichen zustände eines probabilistischen Bits auf einer Geraden liegen

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

Die möglichen Zustände eines QuBits liegen auf einem Kreis, während die möglichen zustände eines probabilistischen Bits auf einer Geraden liegen

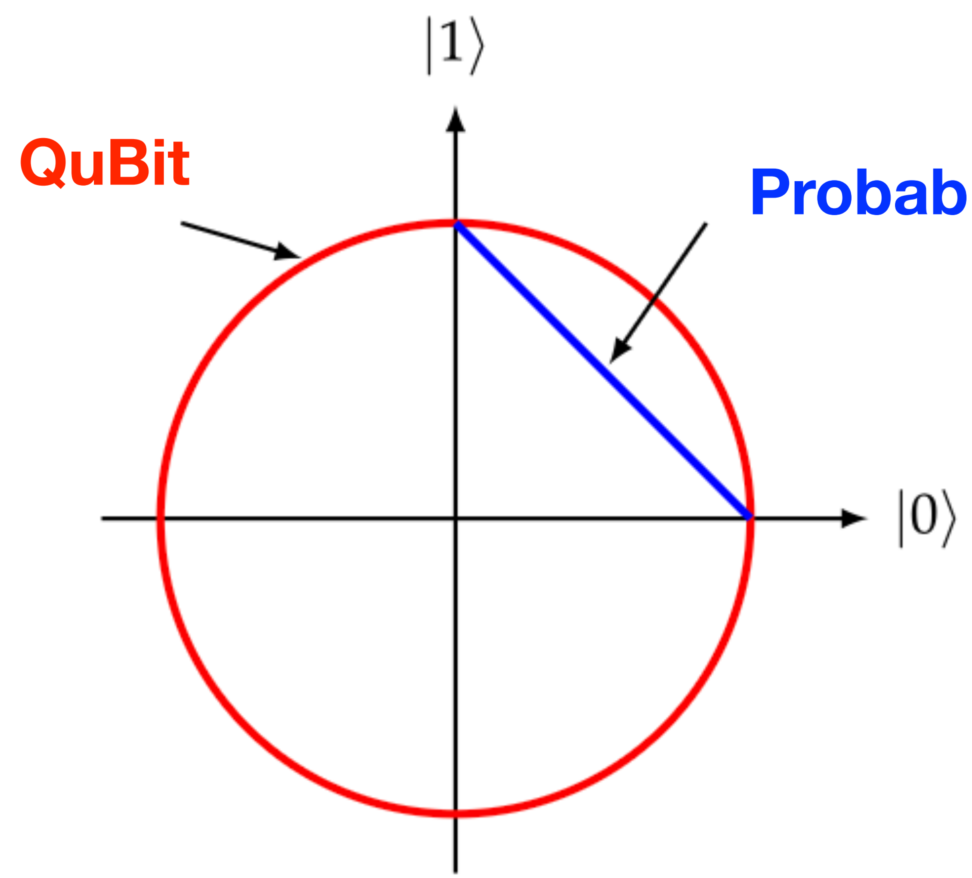


Abbildung 2.2: Der Zustandsraum eines probabilistischen Bits (blau) sowie eines Qubits (rot).

2.1.2 Ein QuBit als ein Kreis

**Die möglichen Zustände eines QuBits liegen auf einem Kreis,
während die möglichen zustände eines probabilistischen Bits auf einer Geraden liegen**

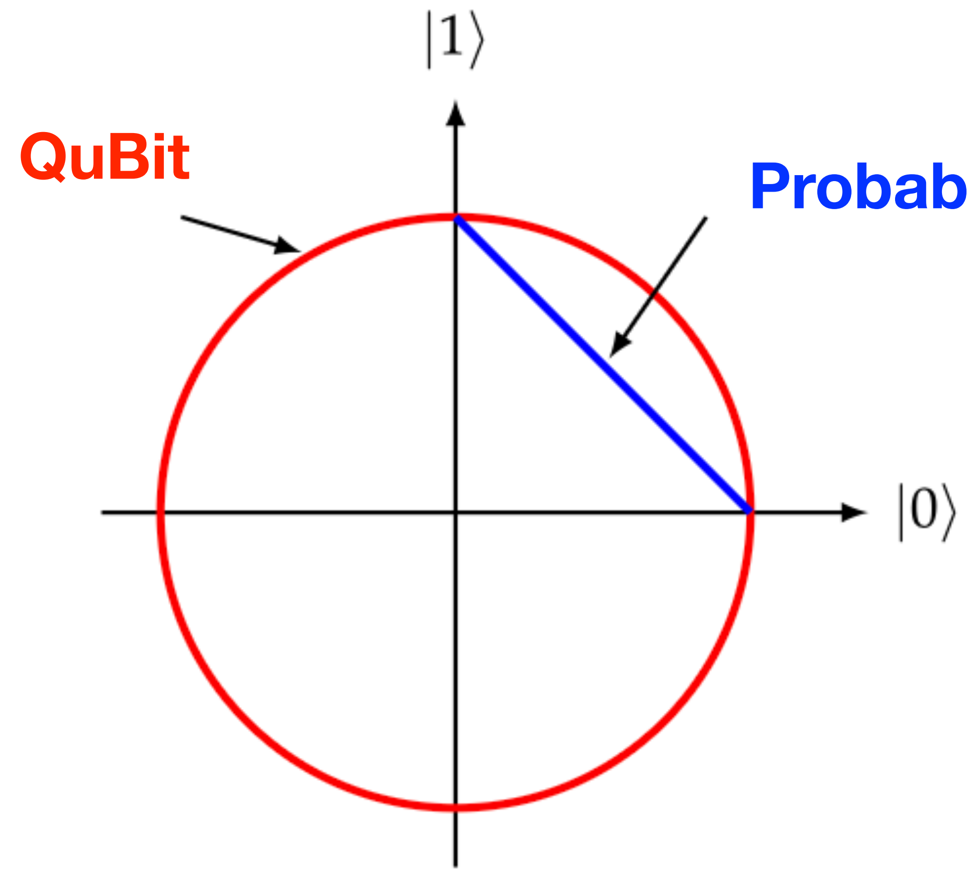


Abbildung 2.2: Der Zustandsraum eines probabilistischen Bits (blau) sowie eines Qubits (rot).

Übungsaufgabe 2.1 (Zustände auf dem Kreis)**.**

Betrachte folgende zwei Zustände eines Qubits:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Wo liegen diese Zustände auf dem Einheitskreis? Welchem Winkel θ entsprechen sie jeweils?

2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

Born-Regel:

Missst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$

2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

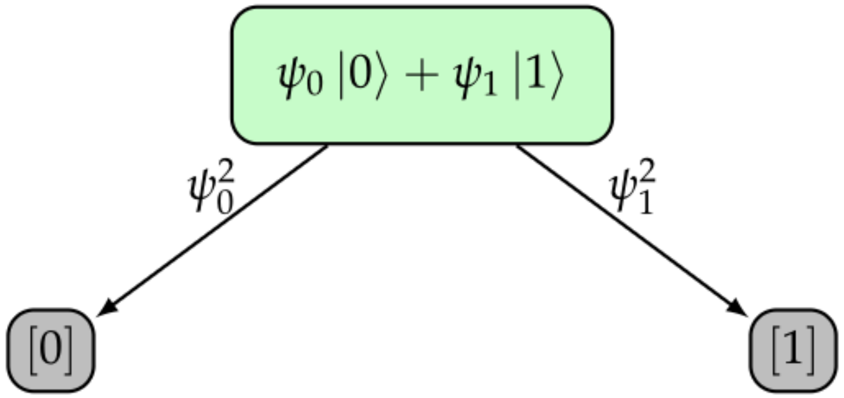
Born-Regel:

Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.

2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

<u>Born-Regel:</u>
Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.

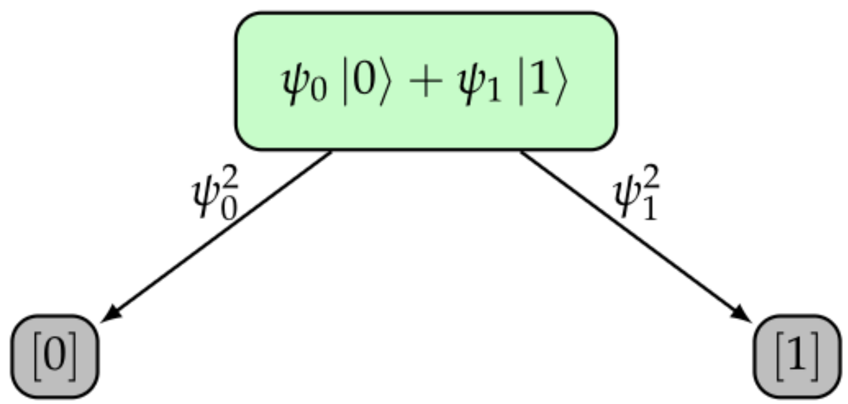


2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

Born-Regel:

Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.



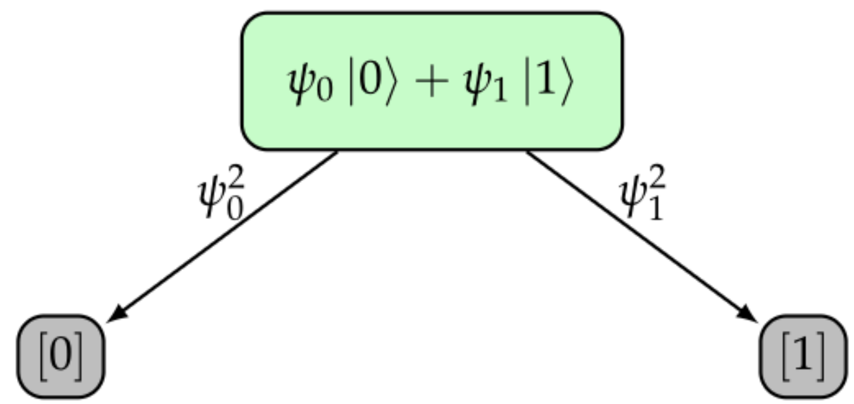
Nach der Messung ist der ursprüngliche Zustand $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ verschwunden und es gibt nur noch $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

2.2 Ein Qubit messen

Ann: man hat den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ -> man kann nicht einfach θ messen

<u>Born-Regel:</u>

Misst man den Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, dann findet man mit der Wahrscheinlichkeit ψ_0^2 das Ergebnis $|0\rangle$ und mit der Wahrscheinlichkeit ψ_1^2 das Ergebnis $|1\rangle$.



Nach der Messung ist der ursprüngliche Zustand $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$ verschwunden und es gibt nur noch $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

Weitere Messungen an diesem System liefern keine zusätzlichen Informationen mehr

2.2 Ein Qubit messen

Weiterer Unterschied zum probabilistischen Bit:

Das probabilistische Bits befindet sicher immer definitiv in einem der Zustände, das QuBit nicht!

2.2 Ein Qubit messen

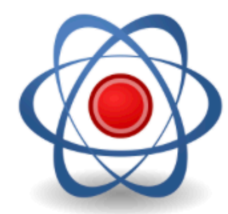
Weiterer Unterschied zum probabilistischen Bit:

Das probabilistische Bits befindet sicher immer definitiv in einem der Zustände, das QuBit nicht!

Das Ergebnis beim Münzwurf könnte prinzipiell vorhersagt werden, das Ergebnis bei der Messung eines QuBits kann prinzipiell nicht vorhergesagt werden - hier gibt es intrinsisch Zufall

2.2 Ein Qubit messen

Hausaufgabe 2.1 (Ein zufälligen Bit auf Quantenbasis erzeugen)**.**

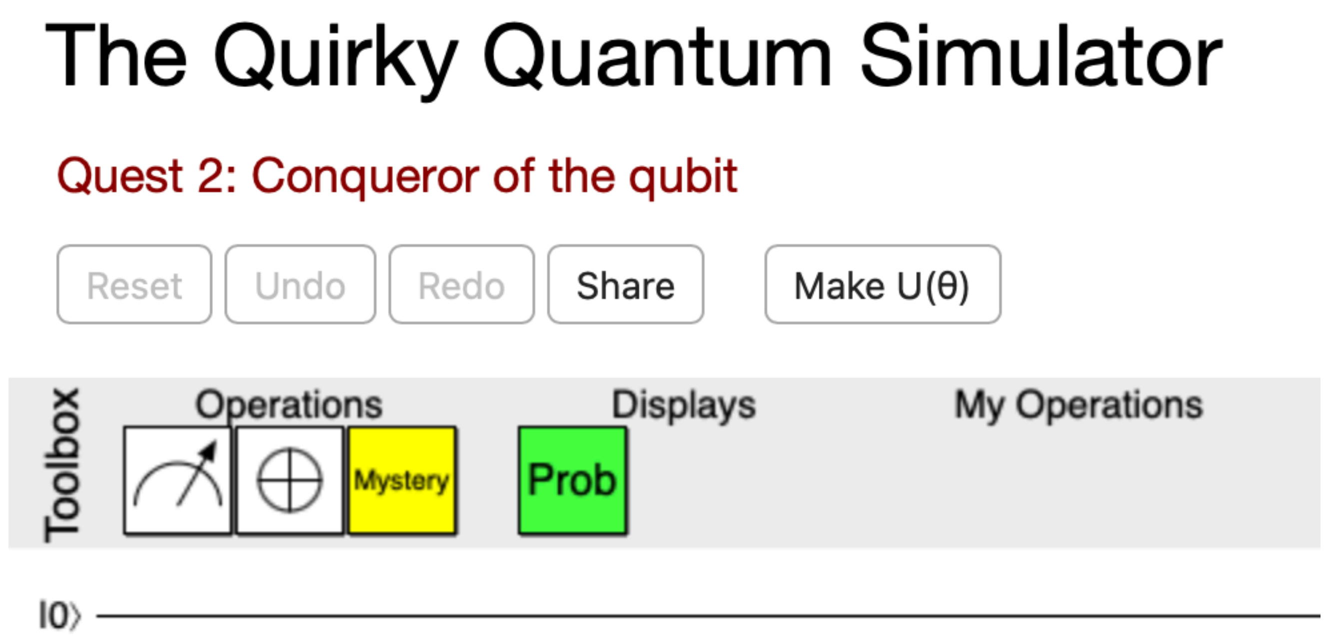


Das Problem: Der Akku von Alice' Eselsroboter ist schon wieder fast leer und muss den Weg zu einer Ladestation finden. Blöderweise hat Eve es geschafft, den Zufallszahlengenerator des Esels zu hacken. Aber da Eve damit auf einem Hackerforum angegeben hat, weiß auch Alice davon. Um deren bösen Plan aufzuhalten, hat Alice einen Mini-Quantencomputer mit einem Qubit im Roboter verbaut. Sie will die fundamentale Unvorhersehbarkeit einer Quantenmessung nutzen, um Zufallsbits zu generieren, die Eve nicht vorhersehen kann.

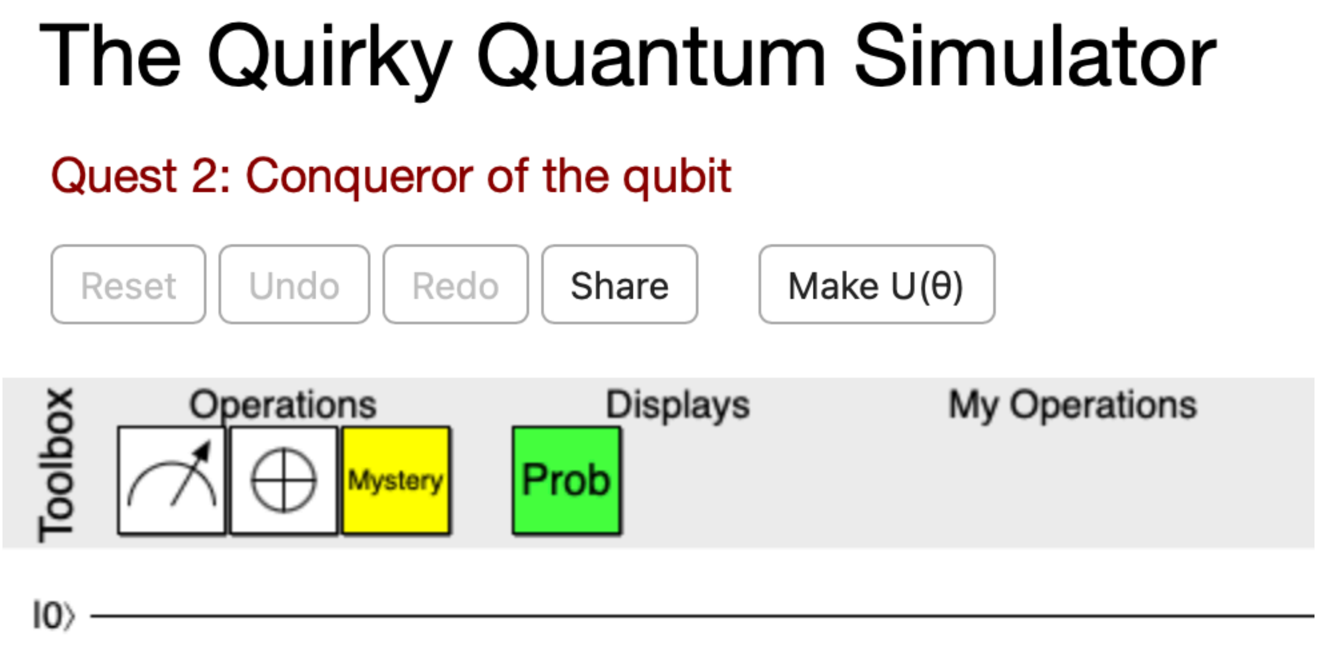
Fragen: Alice kann das Qubit in jeden Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ versetzen und will ein zufälliges Bit generieren, indem sie das Qubit misst.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie das Ergebnis 0 beim messen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ergebnis 1?
2. Alice will den Winkel θ so einstellen, dass beide Wahrscheinlichkeiten $1/2$ sind. Welchen Winkel θ sollte sie wählen? (Es könnte mehrere Lösungen geben!)

2.3 Qubits mit QUIRKY simulieren

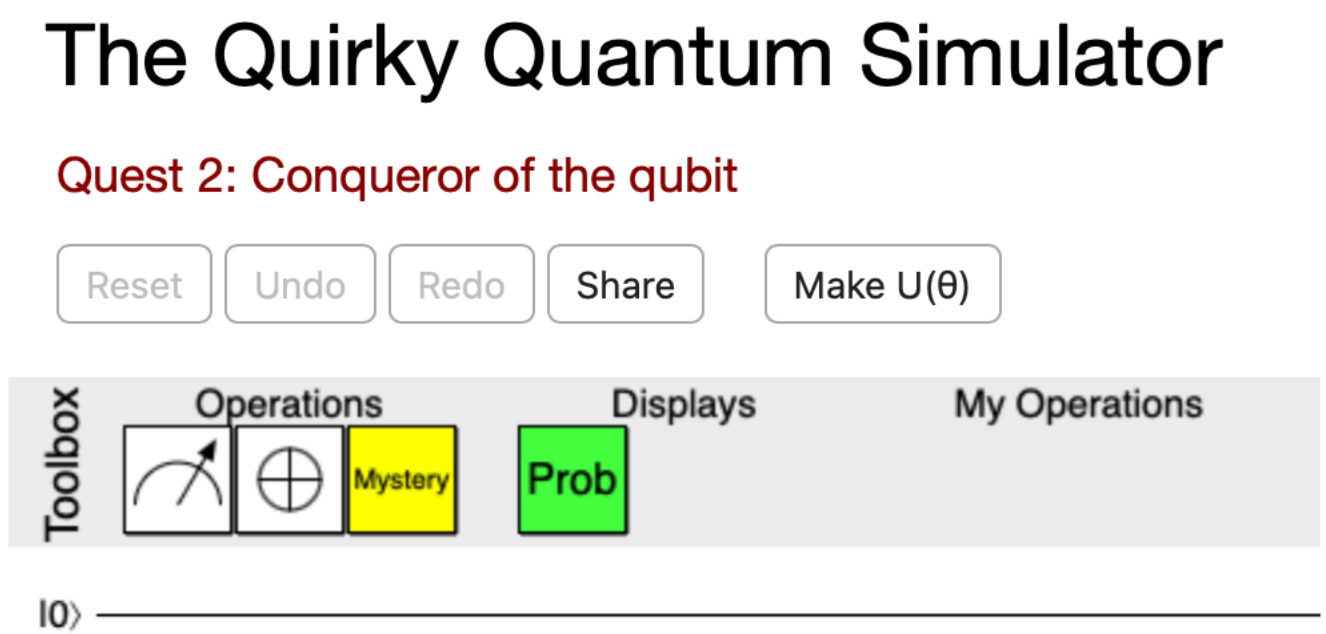


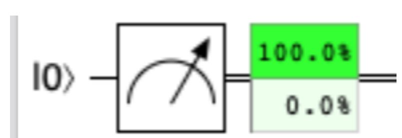
2.3 Qubits mit QUIRKY simulieren



- **Draht (Einzellinie) entspricht nun einem QuBit mit Startzustand** $|0\rangle$

2.3 Qubits mit QUIRKY simulieren



- **Draht (Einzellinie) entspricht nun einem QuBit mit Startzustand** $|0\rangle$
- **Eine Messung wird mit** 

bezeichnet. Nach der Messung gibt es eine Doppellinie (klassisches Bit).

2.4 Operationen auf einem Qubit

<u>**NOT-Operation:**</u>

$$\textbf{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\text{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \text{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\text{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle \quad \text{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle\right)$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

In Vektornotation lautet dies

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

In Vektornotation lautet dies

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quantenmechanik: jede lineare Operation ist eine erlaubt QuBit Operation, solange sie den QuBit-Raum (Kreis) auf sich selbst abbildet (wieder auf Kreis).

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle$$

Linearität: **Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits**

$$\hat{M}\,|\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|1\rangle$$

In Vektornotation lautet dies

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quantenmechanik: **jede lineare Operation ist eine erlaubt QuBit Operation, solange sie den QuBit-Raum (Kreis) auf sich selbst abbildet (wieder auf Kreis).**

Für die NOT-Operation folgt:

$$\textbf{NOT}\left(\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle\right) = \psi_0\textbf{NOT}\,|0\rangle + \psi_1\textbf{NOT}\,|1\rangle = \psi_0\,|1\rangle + \psi_1\,|0\rangle$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation:

$$\textbf{NOT}\,|\,0\rangle = |\,1\rangle \quad \textbf{NOT}\,|\,1\rangle = |\,0\rangle$$

Linearität: Wir erweitern nun das Konzept der Linearität auf eine Operation $\hat{M}$ auf QuBits

$$\hat{M}\,|\,\psi\rangle = \hat{M}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle$$

In Vektornotation lautet dies

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \hat{M}\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\hat{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\hat{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quantenmechanik: jede lineare Operation ist eine erlaubt QuBit Operation, solange sie den QuBit-Raum (Kreis) auf sich selbst abbildet (wieder auf Kreis).

Für die NOT-Operation folgt:

$$\textbf{NOT}\left(\psi_0\,|\,0\rangle + \psi_1\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\textbf{NOT}\,|\,0\rangle + \psi_1\textbf{NOT}\,|\,1\rangle = \psi_0\,|\,1\rangle + \psi_1\,|\,0\rangle$$

oder

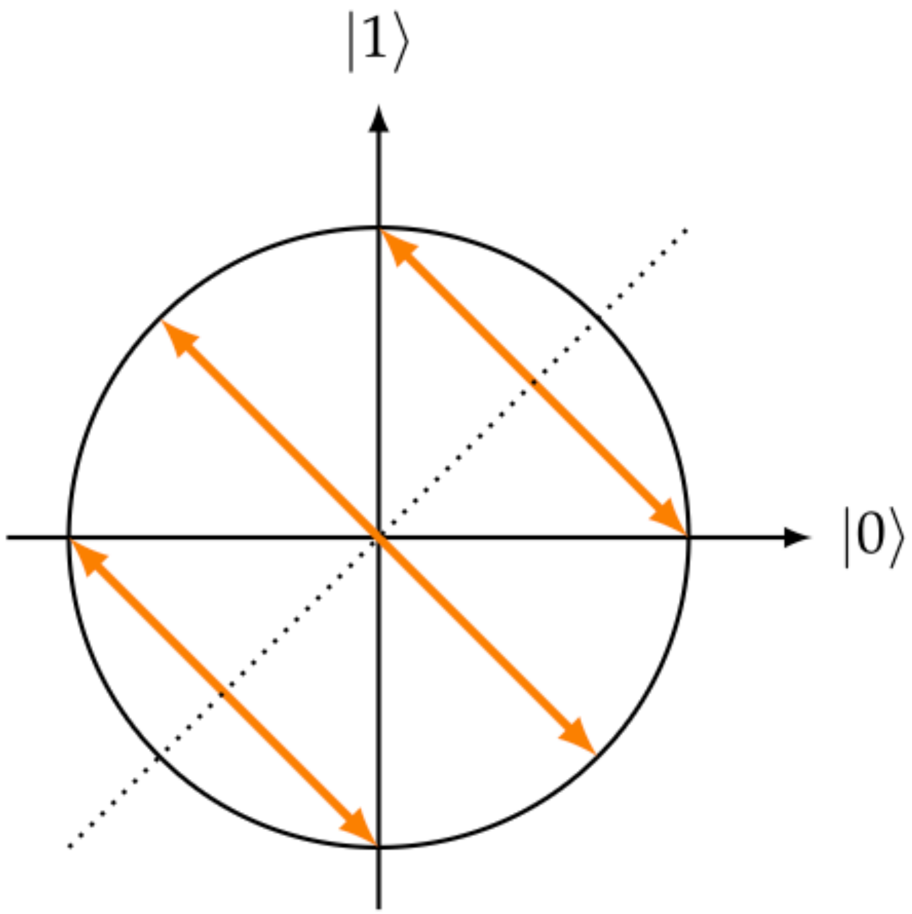
$$\textbf{NOT}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix}$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: Spiegelung an der Winkelhalbierenden

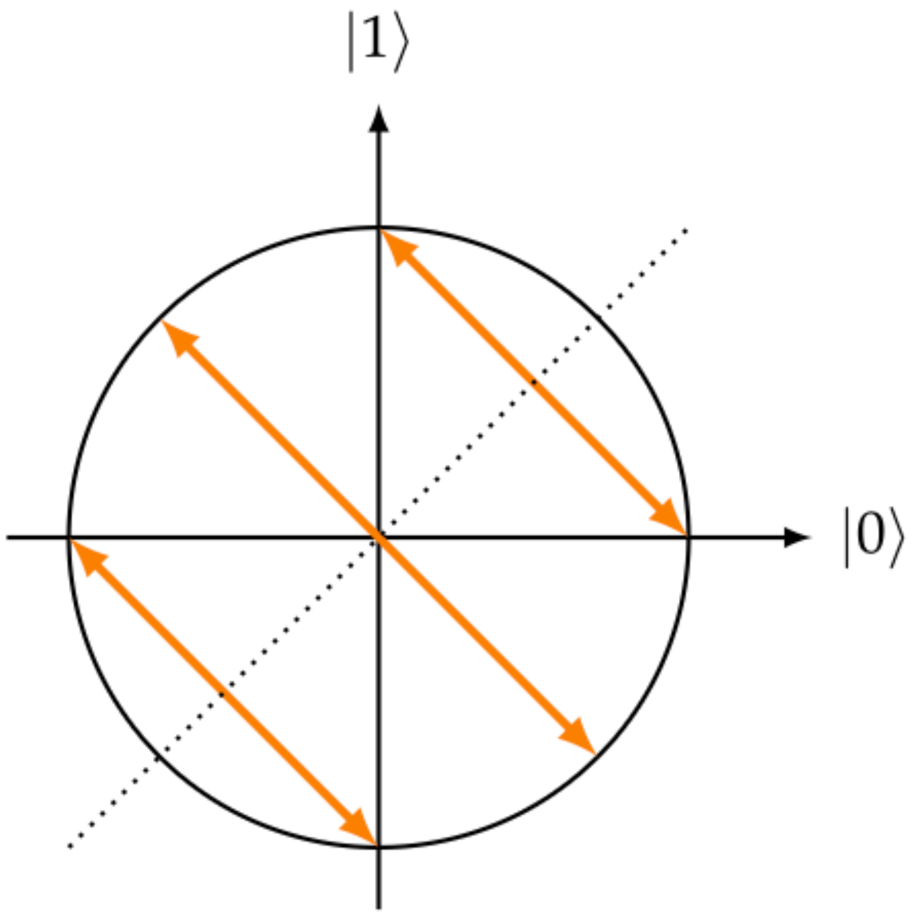
2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: Spiegelung an der Winkelhalbierenden

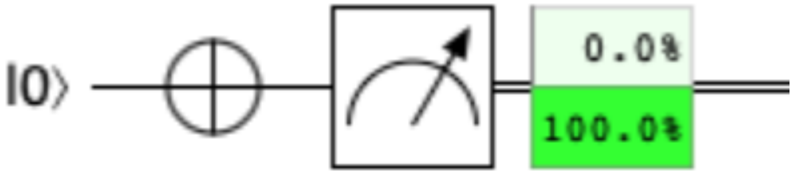


2.4 Operationen auf einem Qubit

NOT-Operation: Spiegelung an der Winkelhalbierenden



Quirky:



2.4 Operationen auf einem Qubit

Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse: Z-Operation

$$Z\,|0\rangle = |0\rangle, \qquad Z\,|1\rangle = -\,|1\rangle,$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse: Z-Operation

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle,$$

Linearität:

$$Z\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_0\\ -\psi_1\end{pmatrix},$$

2.4 Operationen auf einem Qubit

Spiegelung an der $|0\rangle$ Achse: Z-Operation

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle,$$

Linearität:

$$Z\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_0\\ -\psi_1\end{pmatrix},$$

Hausaufgabe 2.2 (Die Z-Operation)**.**

Betrachte folgende zwei Qubit Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

1. Berechne $Z|+\rangle$ und $Z|-\rangle$.
2. Stelle die Z-Operation grafisch auf dem Einheitskreis dar, wie in Abb. 2.4.

Übungsaufgabe 2.2 (Linearität genügt nicht)**.**

Betrachte die MAD-Operation, indem du $\mathrm{MAD}|0\rangle = |0\rangle$ und $\mathrm{MAD}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ durch Linearität erweiterst. Suche einen Qubit Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\mathrm{MAD}|\psi\rangle$ kein gültiger Qubit-Zustand ist. Zeige also, dass MAD keine gültige Operation auf Qubits ist!

2.4.1 Rotationen

Eine naheliegende Operation ist eine Drehung $\hat{U}(\theta)$ um den Winkel θ um den Ursprung

2.4.1 Rotationen

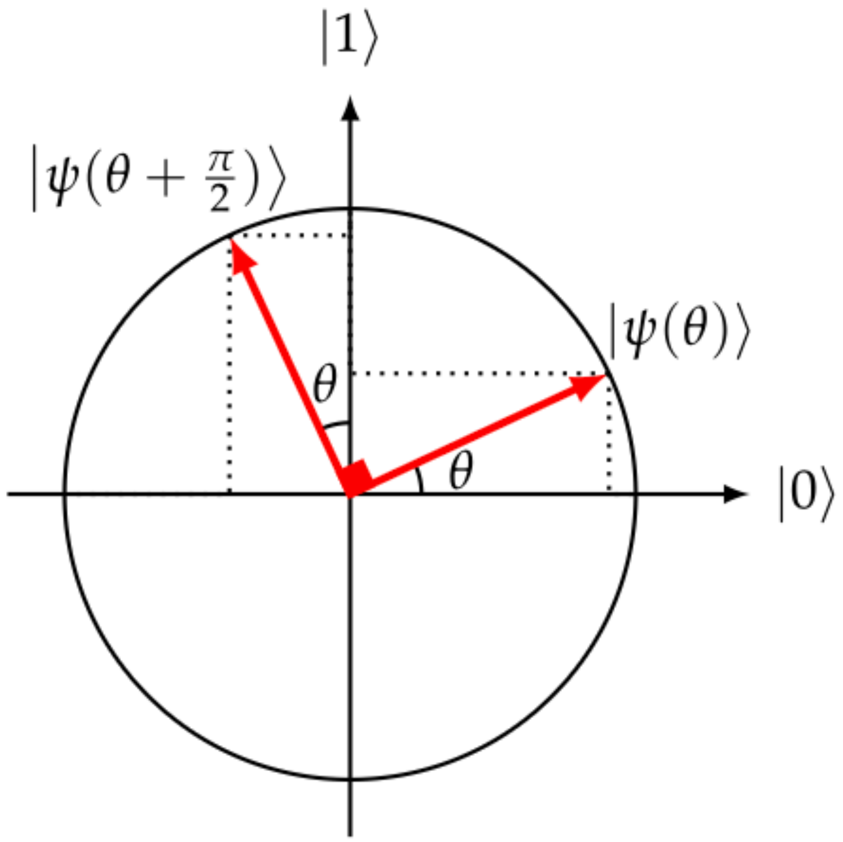
Eine naheliegende Operation ist eine Drehung $\hat{U}(\theta)$ um den Winkel θ um den Ursprung

$$U(\theta)\,|0\rangle = |\psi(\theta)\rangle, \qquad U(\theta)\,|1\rangle = \left|\psi(\theta + \tfrac{\pi}{2})\right\rangle.$$

2.4.1 Rotationen

Eine naheliegende Operation ist eine Drehung $\hat{U}(\theta)$ um den Winkel θ um den Ursprung

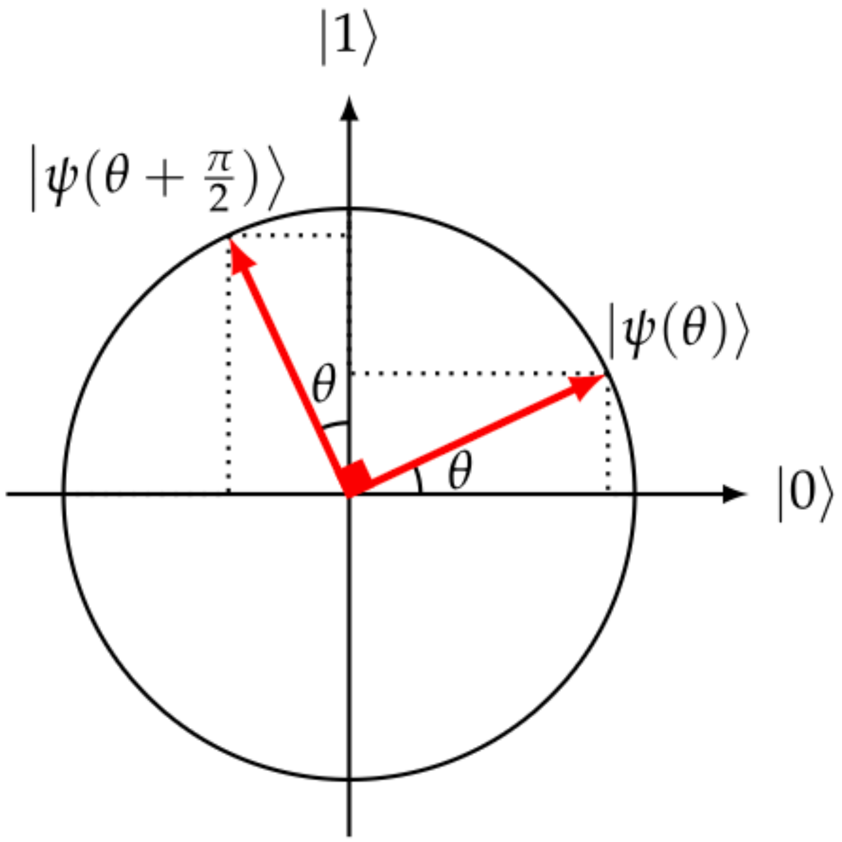
$$U(\theta)\,|0\rangle = |\psi(\theta)\rangle, \qquad U(\theta)\,|1\rangle = \left|\psi(\theta + \tfrac{\pi}{2})\right\rangle.$$



2.4.1 Rotationen

Eine naheliegende Operation ist eine Drehung $\hat{U}(\theta)$ um den Winkel θ um den Ursprung

$$U(\theta)\,|0\rangle = |\psi(\theta)\rangle, \qquad U(\theta)\,|1\rangle = \left|\psi(\theta + \tfrac{\pi}{2})\right\rangle.$$



In Vektornotation:

$$U(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad U(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\theta.$$

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$

2.4.1 Rotationen

Übungsaufgabe 2.3 (Qubit-Rotationen)**.**

1. Berechne $U(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\end{pmatrix}$ mit Gl. 2.8 und 2.27.
2. Nutze die Definition von $|\psi(\theta)\rangle$ aus Gl. 2.5 um zu prüfen, dass für alle Winkel α und β folgendes gilt:

$$U(\alpha)\,|\psi(\beta)\rangle = |\psi(\alpha+\beta)\rangle. \tag{2.29}$$

   Das bedeutet, dass $U(\theta)$ eine Rotation auf beliebigen Qubit-Zuständen entspricht.

Hinweis: Die trigonometrischen Regeln für Winkelsummen und -differenzen könnten hilfreich sein:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{2.30}$$

2.4.1 Rotationen

Übungsaufgabe 2.3 (Qubit-Rotationen)**.**

1. Berechne $U(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}$ mit Gl. 2.8 und 2.27.
2. Nutze die Definition von $|\psi(\theta)\rangle$ aus Gl. 2.5 um zu prüfen, dass für alle Winkel α und β folgendes gilt:

$$U(\alpha)\,|\psi(\beta)\rangle = |\psi(\alpha+\beta)\rangle. \tag{2.29}$$

   Das bedeutet, dass $U(\theta)$ eine Rotation auf beliebigen Qubit-Zuständen entspricht.

Hinweis: Die trigonometrischen Regeln für Winkelsummen und -differenzen könnten hilfreich sein:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{2.30}$$

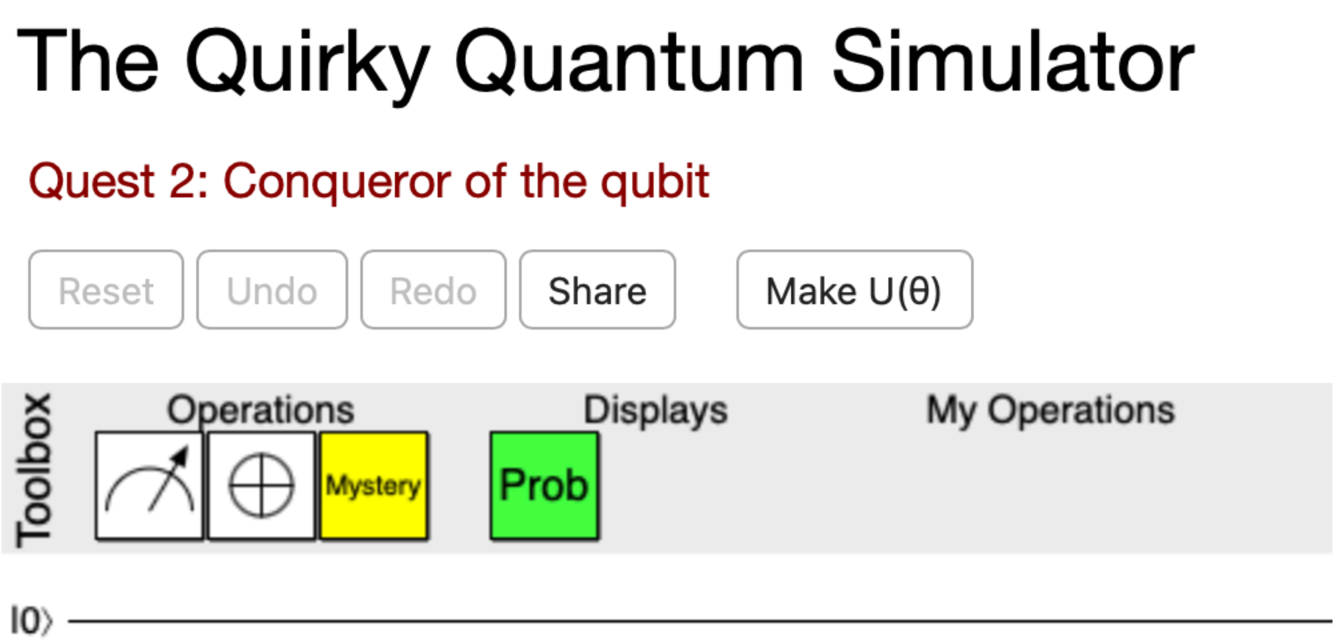
Beachte Rotation um 90 Grad ist keine Spiegelung

$$\text{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle \qquad \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle = |1\rangle$$

$$\text{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle \qquad \hat{U}\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle = -\,|0\rangle$$

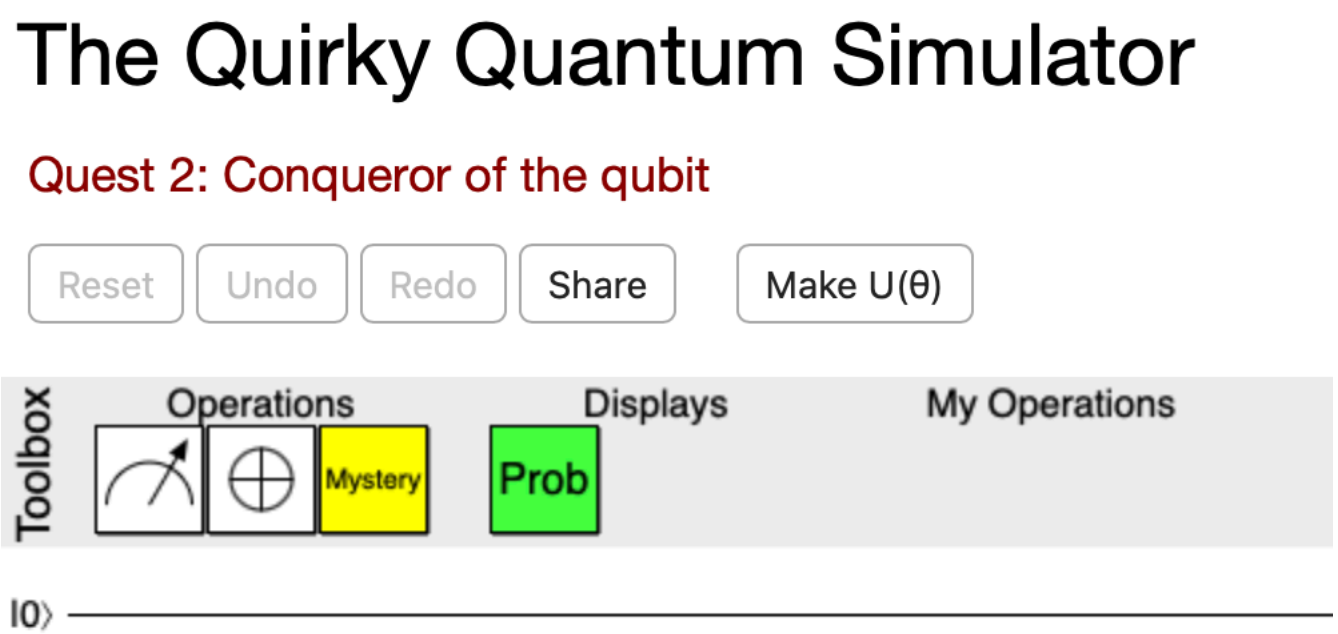
2.4.1 Rotationen

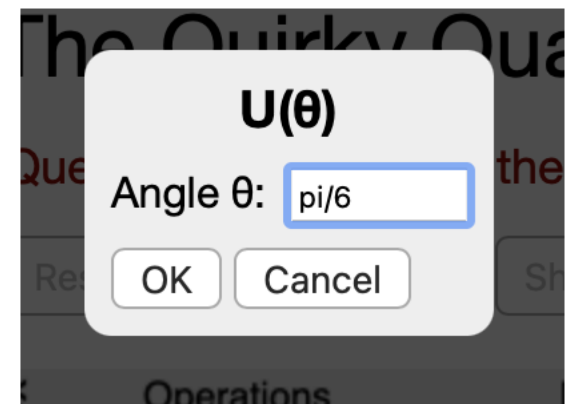
Quirky:



2.4.1 Rotationen

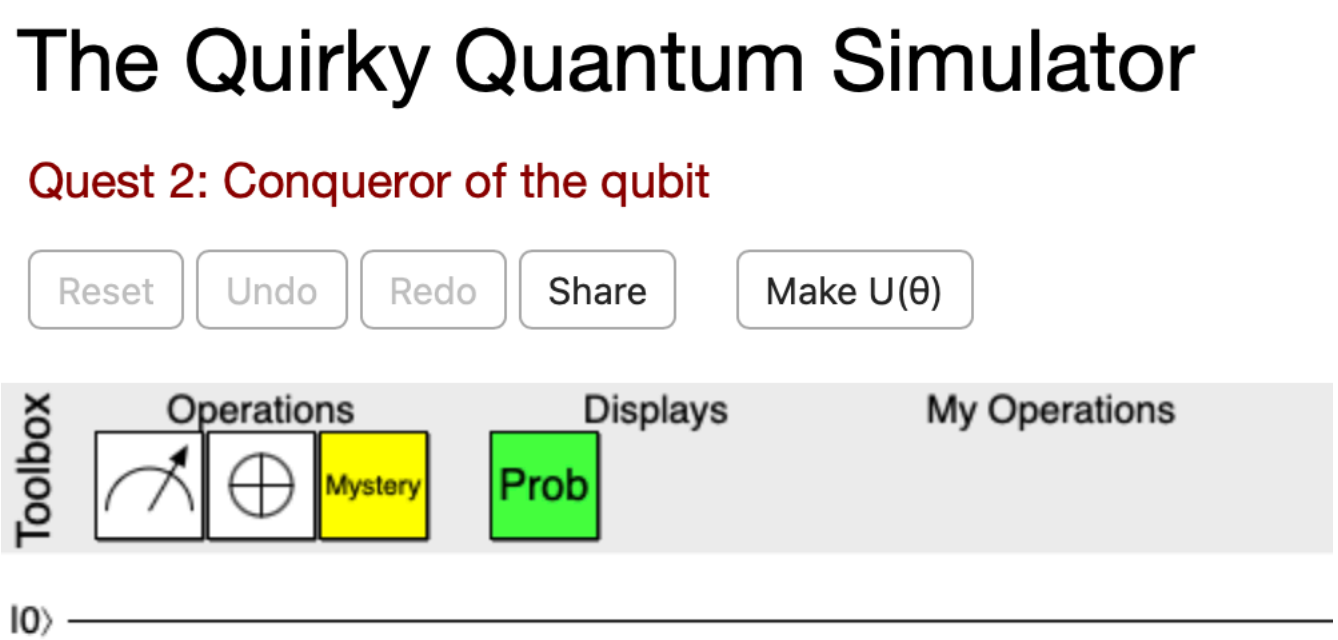
Quirky:

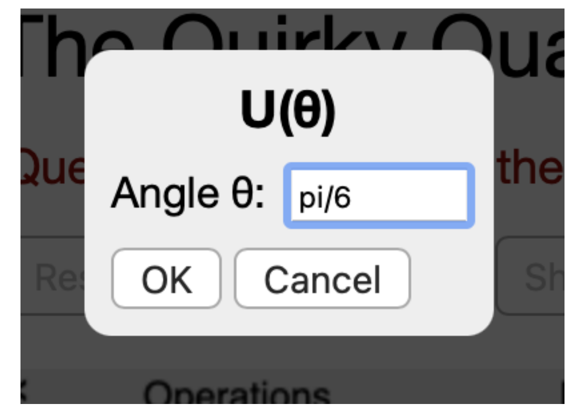




2.4.1 Rotationen

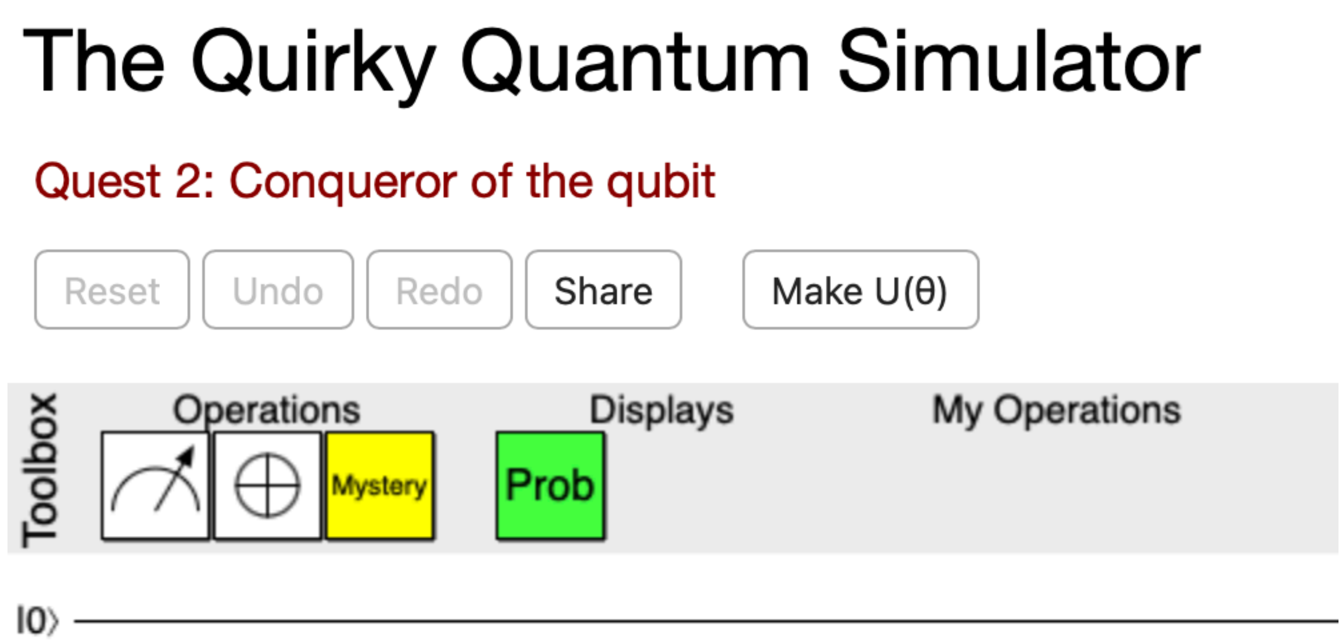
Quirky:

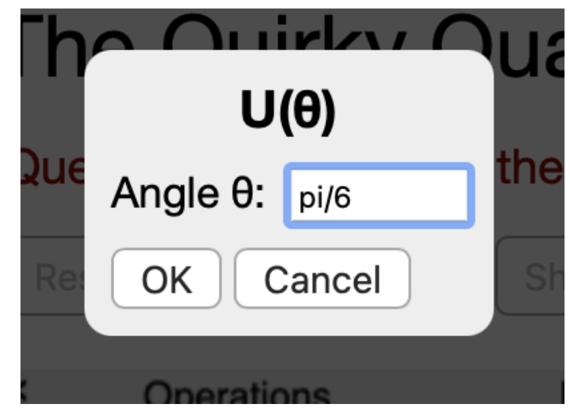




2.4.1 Rotationen

Quirky:



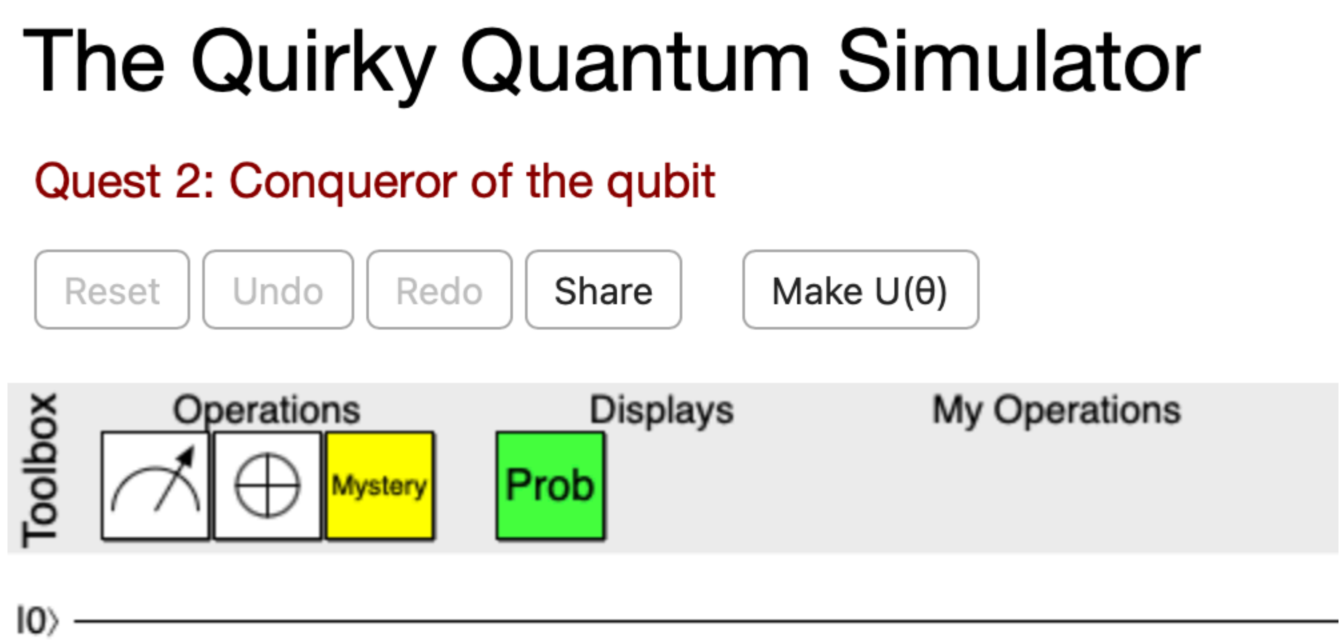


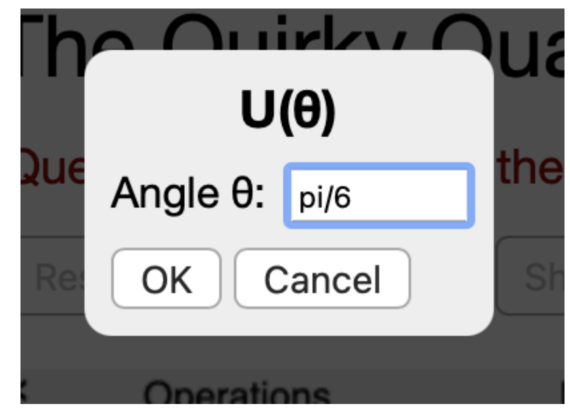
Test:

$$|\psi(\pi/6)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

2.4.1 Rotationen

Quirky:





Test:

$$|\psi(\pi/6)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 25\%,$$

2.4.1 Rotationen

Hausaufgabe 2.3 (Die 30°-Rotation testen)**.**

1. Baue folgende Abfolge von Operationen in Quirky: Bereite zunächst den Zustand $|1\rangle$ vor, rotiere dann um den Winkel $\pi/6$ und messe schlussendlich das Qubit.
2. Nutze Quirky's Wahrscheinlichkeitenanzeige um die Ergebnisse der Messung anzuzeigen. Zeige, dass die Ausgabe von Quirky korrekt ist.
3. Verändere deinen Schaltkreis so, dass man mit Wahrscheinlichkeit 42% das Messergebnis 1 erhält.

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle)$$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right)$$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

Beispiele:

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

Beispiele:
NOT^{-1} = NOT

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

Beispiele:

NOT^{-1} = **NOT** $\qquad \hat{R}(\theta)^{-1} = \hat{R}(-\theta)$

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Werden zwei lineare Operationen $\hat{M}$ und $\hat{N}$ hintereinander ausgeführt, so gilt

$$\hat{N}(\hat{M}\,|\,\psi\rangle) = \hat{N}\left(\psi_0\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{M}\,|\,1\rangle\right) = \psi_0\hat{N}\hat{M}\,|\,0\rangle + \psi_1\hat{N}\hat{M}\,|\,1\rangle$$

d.h. die zusammengesetzte Operation $\hat{N}\,\hat{M}$ ist auch linear.

Analog: drei oder mehr Operationen

Alle bisher behandelten Operation sind invertierbar:
Zu jeder Operation $\hat{M}$ gibt es eine inverse Operation $\hat{M}^{-1}$, so dass gilt:

$$\hat{M}^{-1}\hat{M} = \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{1},$$

wobei $\hat{1}$ der Identität entspricht: $\hat{1}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle$ und $\hat{1}\,|\,1\rangle = |\,1\rangle$

Beispiele:
NOT^{-1} = NOT $\qquad \hat{R}(\theta)^{-1} = \hat{R}(-\theta)$

Übungsaufgabe 2.5 (Das Inverse einer zusammengesetzten Operation).

Zeige dass NM invertierbar ist, wenn M und N invertierbar sind. Beschreibe das Inverse der zusammengesetzten Operation $(NM)^{-1}$ durch die einzelnen Inverse N^{-1} und M^{-1}.

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Alle Operationen auf QuBits sind invertierbar und damit reversibel

2.4.2 Zusammensetzen von Quantenoperationen

Alle Operationen auf QuBits sind invertierbar und damit reversibel

Bei probabilistischen Bits war das nicht der Fall -

vergleiche: probabilistischer Flip: $\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$

2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)

2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)

Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ und NOT

2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)

Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ und NOT

Hausaufgabe 2.4 (Z aus NOT)**.**

Seien Z, NOT und $U(\theta)$ die Qubit-Operationen definiert in Gl. 2.26, 2.25 und 2.27.

1. Finde einen Winkel θ, für den $Z = U(\theta)\,\mathrm{NOT}\,U(-\theta)$ gilt.
2. Finde einen Winkel θ, für den $Z = \mathrm{NOT}\,U(\theta)$ gilt.

Kannst du die Abfolge der Transformationen auf dem Einheitskreis visualiseren?

Hinweis: Schau dir Abb. 2.4 und die Zeichnung, die du für die 2.2 erstellt hast an.

2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)
Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ und NOT

Hausaufgabe 2.4 (Z aus NOT).

Seien Z, NOT und $U(\theta)$ die Qubit-Operationen definiert in Gl. 2.26, 2.25 und 2.27.

1. Finde einen Winkel θ, für den $Z = U(\theta)\,\mathrm{NOT}\,U(-\theta)$ gilt.
2. Finde einen Winkel θ, für den $Z = \mathrm{NOT}\,U(\theta)$ gilt.

Kannst du die Abfolge der Transformationen auf dem Einheitskreis visualiseren?

Hinweis: Schau dir Abb. 2.4 und die Zeichnung, die du für die 2.2 erstellt hast an.

Man findet: die allgemeinste Spiegelung (Reflektion) $\hat{V}(\theta)$ hat die Form:

2.4.3 Spiegelungen

Jede QuBit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion)
Bisher kennen wir 2 Spiegelungen: $\hat{Z}$ und NOT

Hausaufgabe 2.4 (Z aus NOT)**.**

Seien Z, NOT und $U(\theta)$ die Qubit-Operationen definiert in Gl. 2.26, 2.25 und 2.27.

1. Finde einen Winkel θ, für den $Z = U(\theta)\,\mathrm{NOT}\,U(-\theta)$ gilt.
2. Finde einen Winkel θ, für den $Z = \mathrm{NOT}\,U(\theta)$ gilt.

Kannst du die Abfolge der Transformationen auf dem Einheitskreis visualiseren?

Hinweis: Schau dir Abb. 2.4 und die Zeichnung, die du für die 2.2 erstellt hast an.

Man findet: die allgemeinste Spiegelung (Reflektion) $\hat{V}(\theta)$ hat die Form:
$\hat{V}(\theta) =$ **NOT** $\hat{U}(\theta) = \hat{U}(-\theta)$ **NOT**

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$
(Jacques Hadamard)

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$
(Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$ (Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$
(Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$
(Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

$$\hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\big) =: |\,+\,\rangle$$

2.4.3 Spiegelungen

Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$ (Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

$$\hat{H}\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\right) =: |\,+\,\rangle$$

$$\hat{H}\,|\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|\,0\rangle - |\,1\rangle\right) =: |\,-\,\rangle$$

2.4.3 Spiegelungen

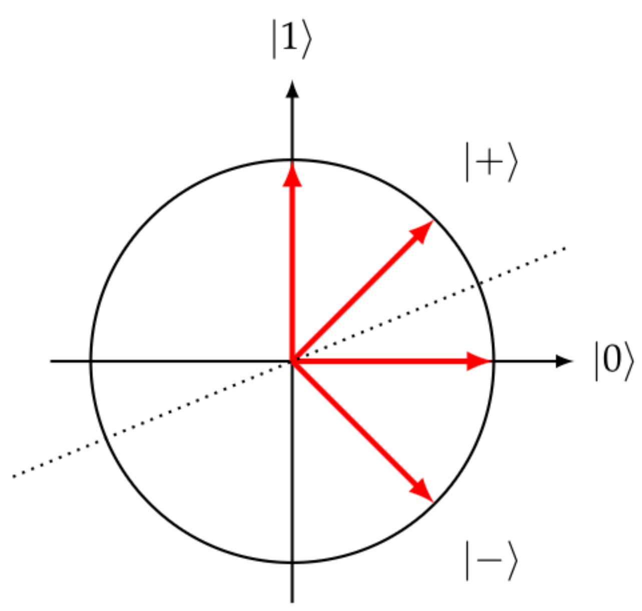
Eine sehr nützliche QuBit-Operation ist die Hadamard Transformation $\hat{H}$ (Jacques Hadamard)

$$\hat{H} = \hat{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \textbf{NOT}\ \hat{U}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Auf die Basiszustände ergibt dies

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) =: |+\rangle$$

$$\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) =: |-\rangle$$



Spiegelung an der Achse

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Alice schaut einem Wettbewerb mit Eselrobotern zu:
Notiz: 1 wenn Lieblingsroboter gewinnt, 0 wenn nicht

Oder Kodierung dieser Information in QuBit
QuBit in Zustand $|\psi(\theta_1)\rangle$ wenn Lieblingsroboter gewinnt, sonst $|\psi(\theta_0)\rangle$
Sie wendet dazu entweder $\hat{U}(\theta_0)$ oder $\hat{U}(\theta_1)$ auf $|0\rangle$ an.

Dann gibt Alice dieses QuBit an Bob
Kann Bob nur anhand des QuBits raten, welchen Bitwert (0 oder 1) Alice kodiert hat?
Wäre es besser, wenn Bob vorher eine Rotation/Spiegelung auf das QuBit anwenden kann?

Übungsaufgabe 2.6 (Plus und Minus)**.**

Stell dir vor, jemand gibt dir ein Qubit in einem der folgenden Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Du willst erraten, in welchem der beiden Zustände es sich befindet. Du darfst eine Rotation anwenden und danach messen. Um welchen Winkel solltest du rotieren und mit welcher Wahrscheinlichkeit rätst du korrekt?

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Übungsaufgabe 2.6 (Plus und Minus)**.**

Stell dir vor, jemand gibt dir ein Qubit in einem der folgenden Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Du willst erraten, in welchem der beiden Zustände es sich befindet. Du darfst eine Rotation anwenden und danach messen. Um welchen Winkel solltest du rotieren und mit welcher Wahrscheinlichkeit rätst du korrekt?

$$\hat{U}\left(-\frac{\pi}{4}\right)|+\rangle = |0\rangle \qquad \hat{U}\left(-\frac{\pi}{4}\right)|-\rangle = -|1\rangle$$

Übungsaufgabe 2.7 (Ununterscheidbare Zustände)**.**

Zeige, dass die beiden Zustände $|\psi(\theta)\rangle$ und $|\psi(\theta+\pi)\rangle = -|\psi(\theta)\rangle$ nicht unterschieden werden können. Also, dass egal welche Qubit-Operationen du anwendest, bevor du misst, die Messergebnisse immer gleich wahrscheinlich sein werden.

Lösung.

Wir haben bereits gesehen, dass jede Kombination M an Rotationen und Spiegelungen linear ist. Damit folgt aus $M\,|\psi(\theta)\rangle = |\psi(\theta')\rangle = \binom{\cos\theta'}{\sin\theta'}$, dass $M\left(-|\psi(\theta)\rangle\right) = -|\psi(\theta')\rangle = \binom{-\cos\theta'}{-\sin\theta'}$. Nach Gl. 2.6 sind die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der Messergebnisse für beide Zustände gleich.

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Hausaufgabe 2.5 (Zwei Zustände unterscheiden).

Seien θ, θ' zwei Winkel. Nimm der Einfachheit halber an, dass $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$. Angenommen, Eve gibt dir ein einzelnes Qubit, welches sich jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ oder $|\psi(\theta')\rangle$ befindet. (Sie könnte beispielsweise eine faire Münze werfen, um zu entscheiden, in welchem Zustand sich das Qubit befinden soll.) Deine Aufgabe ist es nun, herauszufinden, welchen Zustand das Qubit hat. In ein paar Schritten wirst du die optimale Strategie finden:

1. Wende zunächst die Rotation $U(\phi)$ um einen Winkel ϕ an. Welche zwei möglichen Zustände erhältst du dann?
2. Führe als nächstes eine Quantenmessung durch und interpretiere das Ergebnis wie folgt: Falls das Ergebnis 0 ist, rätst du, dass das Qubit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ war, ansonsten rätst du den Zustand $|\psi(\theta')\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit identifizierst du den Zustand korrekt? Schreibe eine Formel mit den Variablen θ, θ' und ϕ.

   Hinweis: Berechne zunächst die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den ersten Zustand bekommen. Dann die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den zweiten Zustand bekommen. Und dann erinnere dich daran, dass beide mit Wahrscheinlichkeit 50% auftreten.
3. Du kannst den Rotationswinkel ϕ immer noch clever wählen. Was ist die Erfolgswahrscheinlichkeit als Funktion von θ und θ', wenn du ϕ optimal wählst?

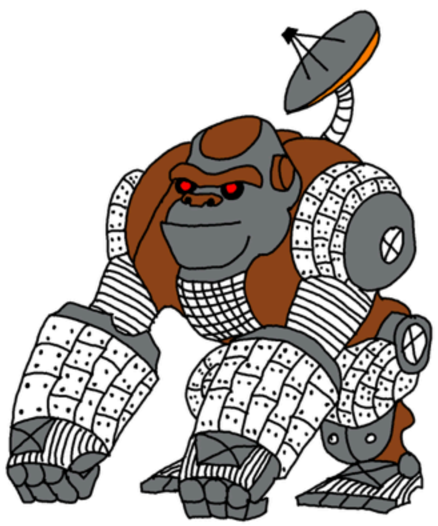
   Hinweis: Versuche die trigonometrischen Identitäten aus Gl. 2.30 zu verwenden. Insbesondere kannst du mit diesen zeigen, dass

   $$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\alpha)\big), \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\alpha)\big). \tag{2.36}$$

   Wenn du nicht mehr weiter weißt, kannst du auch Wolfram Alpha nutzen.

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Übungsaufgabe 2.8 (Arm- und Beinbruch (herausfordernd)).



Alice und Bob erkunden gerne die Wildnis rund um ihre Stadt. Dafür haben sie zwei große Gorilla-Roboter gebaut, die das unwegsame Gelände navigieren können und sie dabei bequem auf dem Rücken tragen. Aber heute ist kein guter Tag für Bob, sein Roboter ist von einer Klippe gefallen! Zum Glück überlebt Bob den Sturz mit nur ein paar blauen Flecken, aber dem Roboter geht es nicht so gut: ein Arm, ein Bein und das Kommunikationsmodul sind kaputt gegangen. Bob hat leider keine Ersatzteile für die Arme und Beine mitgebracht, schafft es aber zumindest das Kommunikationsmodul kurzzeitig zu reparieren. Dummerweise kann er nur ein einzelnes Qubit senden, bevor es ganz kaputt geht. Bob würde gerne Alice Bescheid geben, welches Bein (links oder rechts) und welcher Arm (links oder rechts) kaputt ist, damit sie das entsprechende Bauteil von ihrem Roboter zu ihm herunter schicken kann. Sie kann ihm aber nur ein Gliedmaß geben, da beide Roboter noch nach Hause laufen können müssen (sie können zum Glück auf drei Beinen laufen). Die Situation ist aber noch komplizierter, da Alice nicht ihr ganzes Werkzeug mitgebracht hat. Bob weiß, dass sie entweder das Werkzeug zum abmontieren von Beinen oder Armen dabei hat – leider kann er sich nicht daran erinnern welches von beiden!

Es gibt vier mögliche Kombinationen, in denen die Arme und Beine gebrochen sein können – du kannst annehmen dass alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/4$ auftreten. Weiterhin gibt es zwei mögliche Werkzeuge, die Alice dabei haben könnte und du kannst annehmen, dass beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten.

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Fragen:

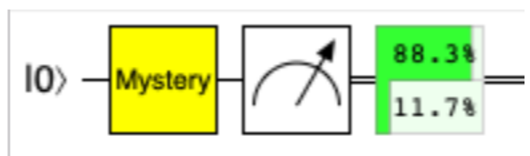
1. Wenn Bob nur ein Bit an Alice senden kann, wie sollte er den Wert auswählen, je nachdem welche der vier Möglichkeiten eingetroffen ist? Wie sollte Alice die Nachricht interpretieren und entscheiden welches Gliedmaß, linkes oder rechtes, sie ihm senden sollte? (Denk daran, dass Alice entweder nur Beine oder nur Arme senden kann und Bob nicht weiß welches von beiden der Fall ist.) Wenn beide die optimale Strategie nutzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit interpretiert Alice die Nachricht richtig und sendet das richtige Körperteil an Bob?
2. Was, wenn Bob stattdessen ein Qubit senden kann? Je nach seiner Situation kann er einen von vier Zuständen wählen und Alice kann abhängig von ihrer Situation eine von zwei Rotationen anwenden, bevor sie das Qubit misst. Was ist ihre gemeinsame beste Strategie und welche Erfolgswahrscheinlichkeit hat sie?

Du kannst annehmen, dass Alice und Bob wissen, wie sie ihre Nachrichten interpretieren müssen, da sie im Voraus darüber gesprochen haben, was sie in dieser Notsituation machen sollten.

2.5.1 Mysteryoperation 2

Quantentomographie:
Versuche Zustand durch Messungen und Manipulationen zu bestimmen

$$M\,|0\rangle = \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}.$$



$$\psi_1^2 = 0.117 \qquad \psi_2^2 = 0.883$$

Ergebnis: $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%}\\ \sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%}\\ -\sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}$

Hausaufgabe 2.6 (Zeit für ein Mysterium)**.**

1. Wie kannst du zwischen den beiden Optionen unterscheiden? Nutze Quirky um den Quantenzustand $M\,|0\rangle$ bis auf allgemeines Vorzeichen festzustellen.
2. Bestimme genauso auch den Quantenzustand $M\,|1\rangle$.
3. *Bonusfrage:* Bestimmen die beiden Antworten die Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für M auf. Falls nicht, wie kannst du M herausfinden?

ZUKUNFTSENERGIEN – ZUKUNFTSMUSIK?

EIN PHYSIKSHOW-MUSICAL ÜBER ENERGIEN DER ZUKUNFT

13. DEZEMBER 2025 – 11 & 15 UHR

EMMY NOETHER CAMPUS
Hörsaal ENC D 114
Walter-Flex-Straße 3, 57072 Siegen

WEITERE INFOS UND ANMELDUNG (EMPFOHLEN AB 12 JAHREN)
www.physik-astro.uni-bonn.de/physikshow/de/termine

Gefördert durch:
Bundesministerium für Forschung, Technologie und Raumfahrt
UNIVERSITÄT BONN
Universität Siegen
Physikshow Universität Bonn
2025 Wissenschaftsjahr ZUKUNFTS ENERGIE