Quantum2025

Universität Siegen

color meets flavor

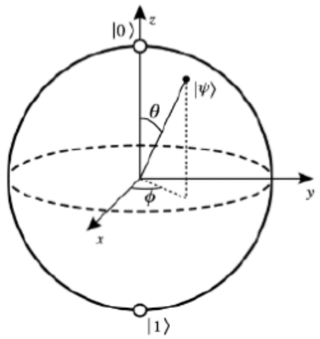
MITTWOCHS AKADEMIE

TALENTNETZ SiWi
Verein zur Förderung begabter Kinder & Jugendlicher Südwestfalen

Ankündigung für das Wintersemester 2025/26

Quanten Computing

Prof. Dr. Alexander Lenz

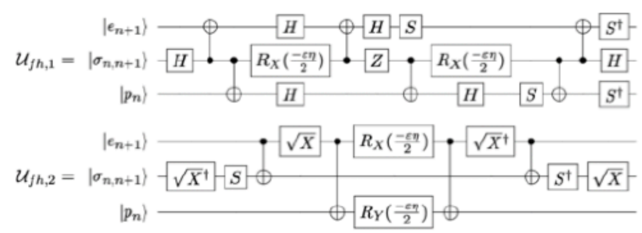


$$\boxed{|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle}$$

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle\,,\\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle\,,\\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle\,,\\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle\,. \end{aligned}$$

Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundlagen des Quanten Computing,

2025 feiern wir das 100-jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantentheorie. Lange Zeit war Quantentheorie reinste Grundlagenforschung, welche ausschliesslich zum fundamentalen Verständnis unserer Welt diente, aber keinerlei praktische Anwendung hatte. Sie einigen Jahren zeichnet sich nun ein immenses Potential von Quanten Computing ab, welches bei manchen Anwendungen, herkömmliche Supercomputer bei Weitem übertreffen kann. An der Universität Siegen wurde 2010 der erste deutsche Quantencomputer in Betrieb genommen.



In dieser Vorlesung wird eine elementare Einführung in Quanten Computing gegeben und es werden auch praktische Programmierübungen an Quantensimulatoren durchgeführt. Die Vorlesung ist für Schülerinnen und Schüler ab der 10. Klasse geeignet, ebenso für Studierende und Lehrkräfte, sowie mathematisch interessierte Laien, die über Mathematik Kenntnisse auf dem Oberstufen-Niveau verfügen.

SUBATOMIC HEROES

10 Termine im Wintersemester 25/26, mittwochs 16-18:
19.11., 26.11., 3.12., 10.12, 17.12., 7.1., 14.1., 21.1., 28.1., 4.2
Emmy Noether Campus ENC-D-114, 57072 Siegen
Kontakt: alexander.lenz@uni-siegen.de
Weitere Informationen unter:
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

Termine:

19.11.:
26.11.:
3.12.: Vertretung
10.12.:
17.12.:

———————

7.1.:
14.1.:
21.1.:
28.1.:
4.2.:

Wdh.: Einführung

Quanten Computing - Was denkt die Welt darüber?

Markets →		
DOW	47,147.48	0.65% ▾
S&P 500	6,734.11	0.05% ▾
NASDAQ	22,900.59	0.13% ▴

Fear & Greed Index → 22 **Extreme Fear** is driving the US market

Latest Market News →
- Disney content will return to YouTube TV under a new deal
- Trump lowers tariffs on coffee, beef and fruits, as Americans' c...
- Judge says he'll approve opioid settlement with OxyContin ma...

BUSINESS › TECH · 5 MIN READ

A seismic shift in computing is on the horizon (and it's not AI)

UPDATED NOV 12, 2025

By Lisa Eadicicco

The Albany NanoTech Complex where IBM's quantum wafers are fabricated. *(IBM)*

Creating revolutionary pharmaceutical drugs, testing new materials for cars and simulating how market scenarios can affect banks — these are just some of the tasks that could take months or years to develop, even with the most advanced computers.

But what if that timeframe could be cut down to minutes or hours?

MARKETS | IBM +0.27%

The Motley Fool

IBM Pushes Ahead in the Quantum Computing Race

November 13, 2025 — 05:40 am EST

Written by **Timothy Green** for **The Motley Fool** →

Key Points

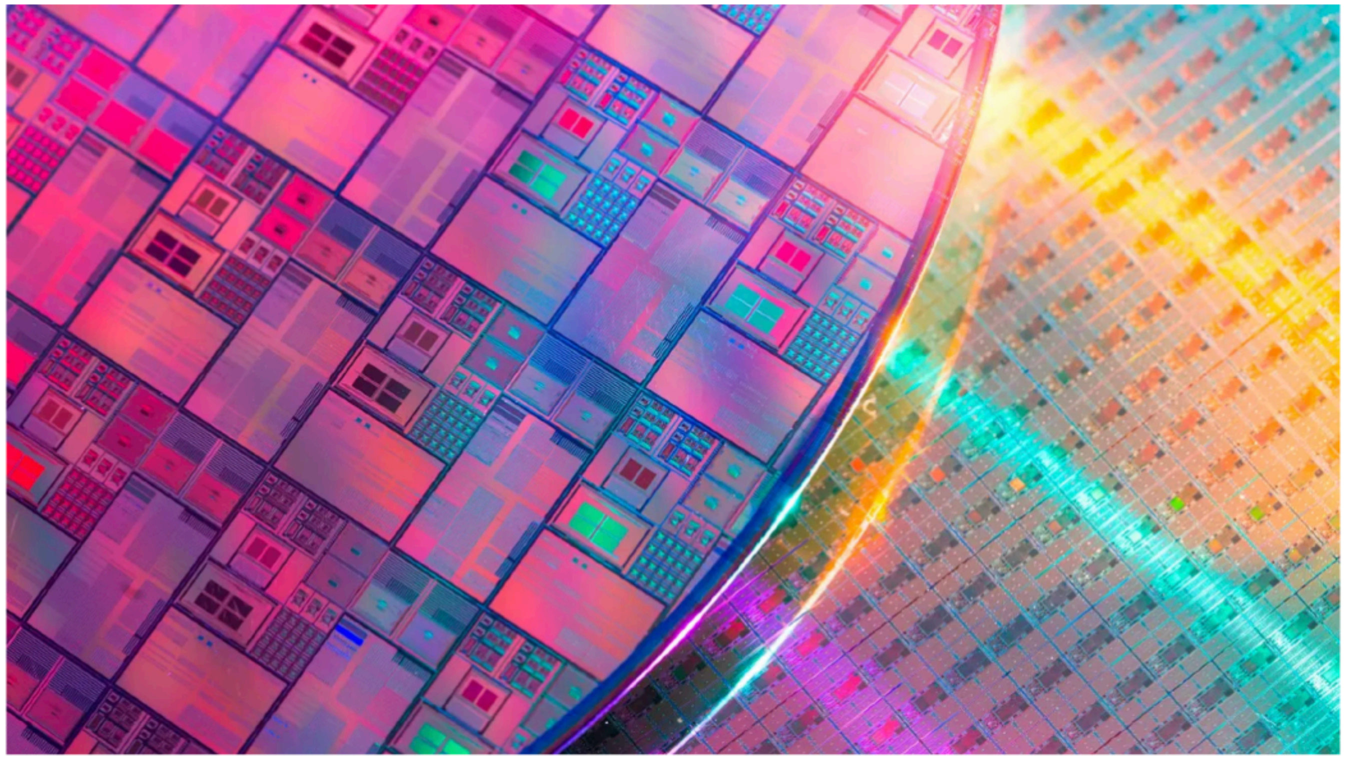
- IBM disclosed details on its Nighthawk and Loon quantum processors.
- The company expects quantum advantage next year and fault-tolerance by 2029.

New Chinese optical quantum chip allegedly 1,000x faster than Nvidia GPUs for processing AI workloads - firm reportedly producing 12,000 wafers per year

News | By Aaron Klotz published 20 hours ago

Nvidia is also investing in similar optical quantum technology.

Comments (5)



(Image credit: Shutterstock)

Wdh.: Einführung

Quanten Computing - Warum Siegen?

START-UP

Ionen in der Falle

VON STEPHAN FINSTERBUSCH - AKTUALISIERT AM 30.11.2023 - 19:54

Zurück zum Artikel

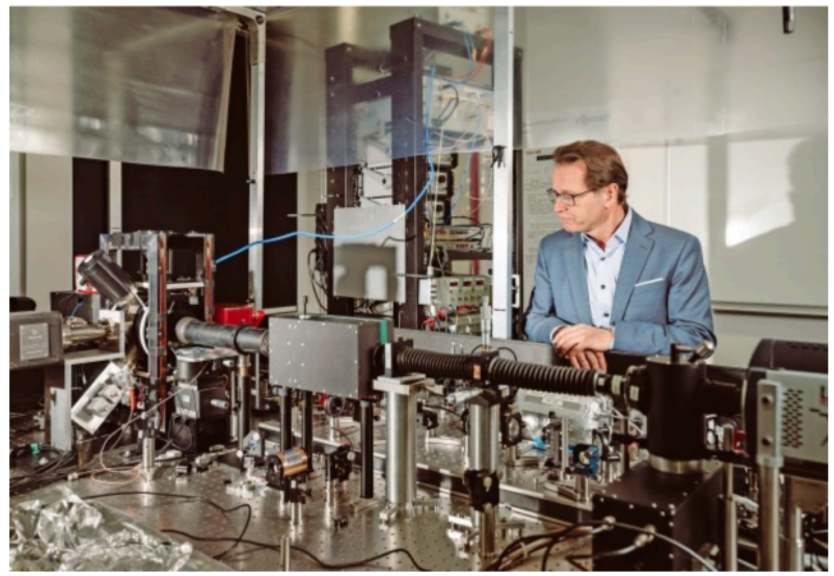


Bild: AARON LEITHÄUSER

1/4

Der Professor und sein Werk: Christof Wunderlich neben dem ersten Quantencomputer Deutschlands auf dem Emmy-Noether-Campus der Universität Siegen

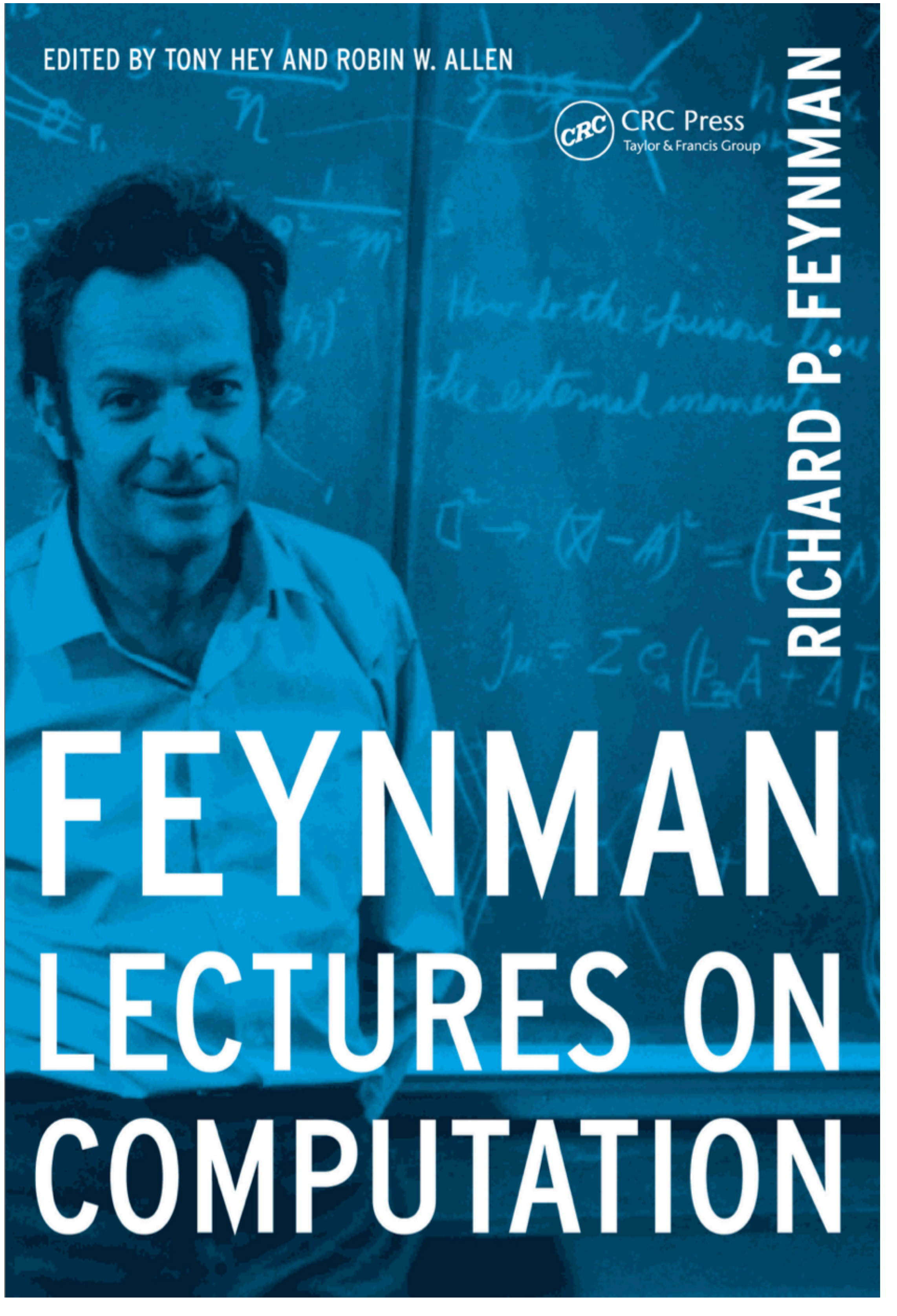
Es gibt eine Quantencomputing Firma in Siegen

Deutscher Quantencomputer

eleQtron erhält ersten »Quantum Effects Award«

12. Oktober 2023, 6:38 Uhr | Heinz Arnold

Wdh.: Einführung



Wdh.: Einführung

1. Was sind klassische Bits
2. Klassische Operatoren/Gates
3. Reversible Operatoren

Wdh.: Klassische Bits

Klassische Computer rechnen mit “Bits”

Ein Bit ist ein Objekt, das nur zwei Zustände haben kann
Null oder Eins

Beispiele:
- **Münze: bei Wurf endet man mit Kopf oder mit Zahl, z.B. Kopf = 1, Zahl = 0**
- **Stromkreis: Strom fliesst = 1, kein Strom = 0**

Wdh.: Klassische Bits

Mit Bits kann man zählen

Dezimalsystem: Basis 10

10 Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$2025 = 2 * 1000 + 0 * 100 + 2 * 10 + 5 * 1$$
$$= 2 * 10^3 + 0 * 10^2 + 2 * 10^1 + 5 * 10^0$$

1. **Stelle von rechts:** $10^0 = 1$
2. **Stelle von rechts:** $10^1 = 10$
3. **Stelle von rechts:** $10^2 = 100$
4. **Stelle von rechts:** $10^3 = 1000$
5. **….**

Binärsystem: Basis 2

2 Ziffern: 0,1

$$1001_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$$
$$= 1 * 8 + 0 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 9$$

1. **Stelle von rechts:** $2^0 = 1$
2. **Stelle von rechts:** $2^1 = 2$
3. **Stelle von rechts:** $2^2 = 4$
4. **Stelle von rechts:** $2^3 = 8$
5. **….**

Wdh.: Klassische Bits

1. **Wie lautet die Dezimalzahl 49 im System mit der Basis 7**

$$100_7 \equiv 1 * 7^2 + 0 * 7^1 + 0 * 7^0 = 49$$

2. **In welchen System lautet die Dezimalzahl 91, 111**

$$111_9 \equiv 1 * 9^2 + 1 * 9^1 + 1 * 9^0 = 81 + 9 + 1 = 91$$

3. **Die Ausserirdischen vom Exo-Planeten Kepler-452b, der 1800 Lichtjahre von uns entfernt ist, sehen menschenähnlich aus, allerdings besitzen sie 12 Finger. Wie wird vermutlich auf Kepler-452 die Zahl 160 dargestellt werden?**

$$114_{12} \equiv 1 * 12^2 + 1 * 12^1 + 4 * 12^0 = 144 + 12 + 4 = 160$$

Wdh.: Klassische Bits

800
+950
— — —
1750

Addition von Dezimalzahlen

$0 + 0 = 0$ **-> 1 Stelle => kein Übertrag**

$0 + 5 = 5$ **-> 1 Stelle => kein Übertrag**

$8 + 9 = 17$ **-> 2 Stellen => Übertrag**

0111001
+0111001
— — — — —
1110010

Addition von Binärzahlen

$0 + 0 = 0 = 2^0 \equiv 0_2$ **-> 1 Stelle => kein Übertrag**

$0 + 1 = 1 = 2^1 \equiv 1_2$ **-> 1 Stelle => kein Übertrag**

$1 + 1 = 2 = 2^1 \equiv 10_2$ **-> 2 Stellen => Übertrag, Rest 0**

$1 + 1 + 1 = 3 \equiv 11_2$ **-> 2 Stellen => Übertrag, Rest 1**

Test: 0111001= 1+8+16+32= 57; 57*2 =114
1110010= 2+16+32+64=114

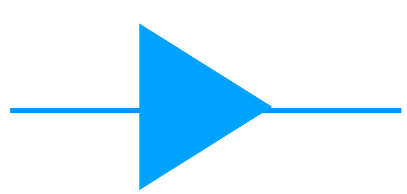
Wdh.: Einführung

1. Was sind klassische Bits
2. Klassische Operatoren/Gates
3. Reversible Operatoren

Wdh.: Operationen mit 1 klassischen Bit

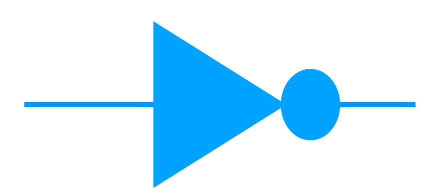
Identität

A	C
0	0
1	1

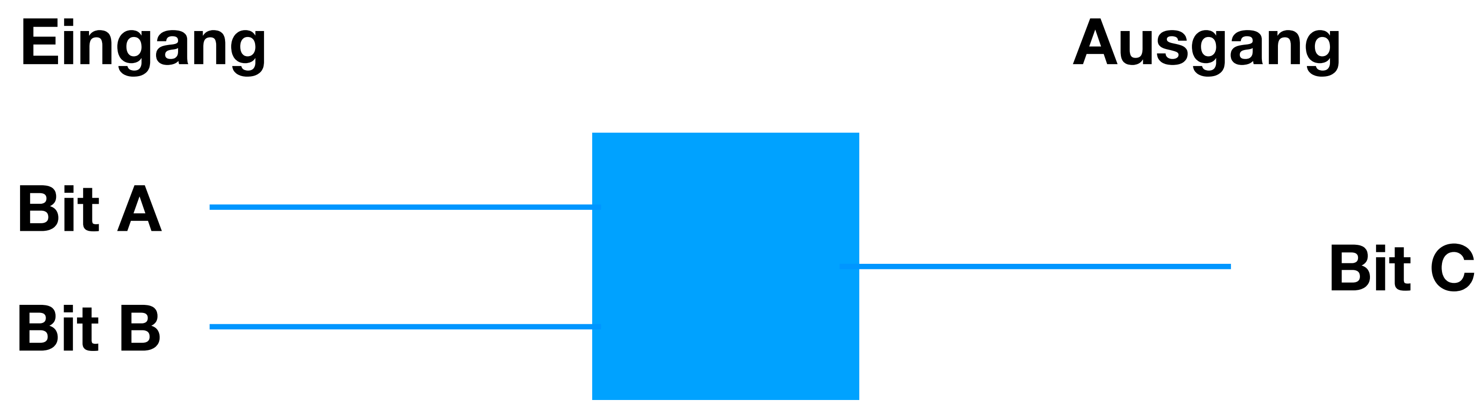


Not-Operation

A	C
0	1
1	0



Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits



AND

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(E)XOR

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

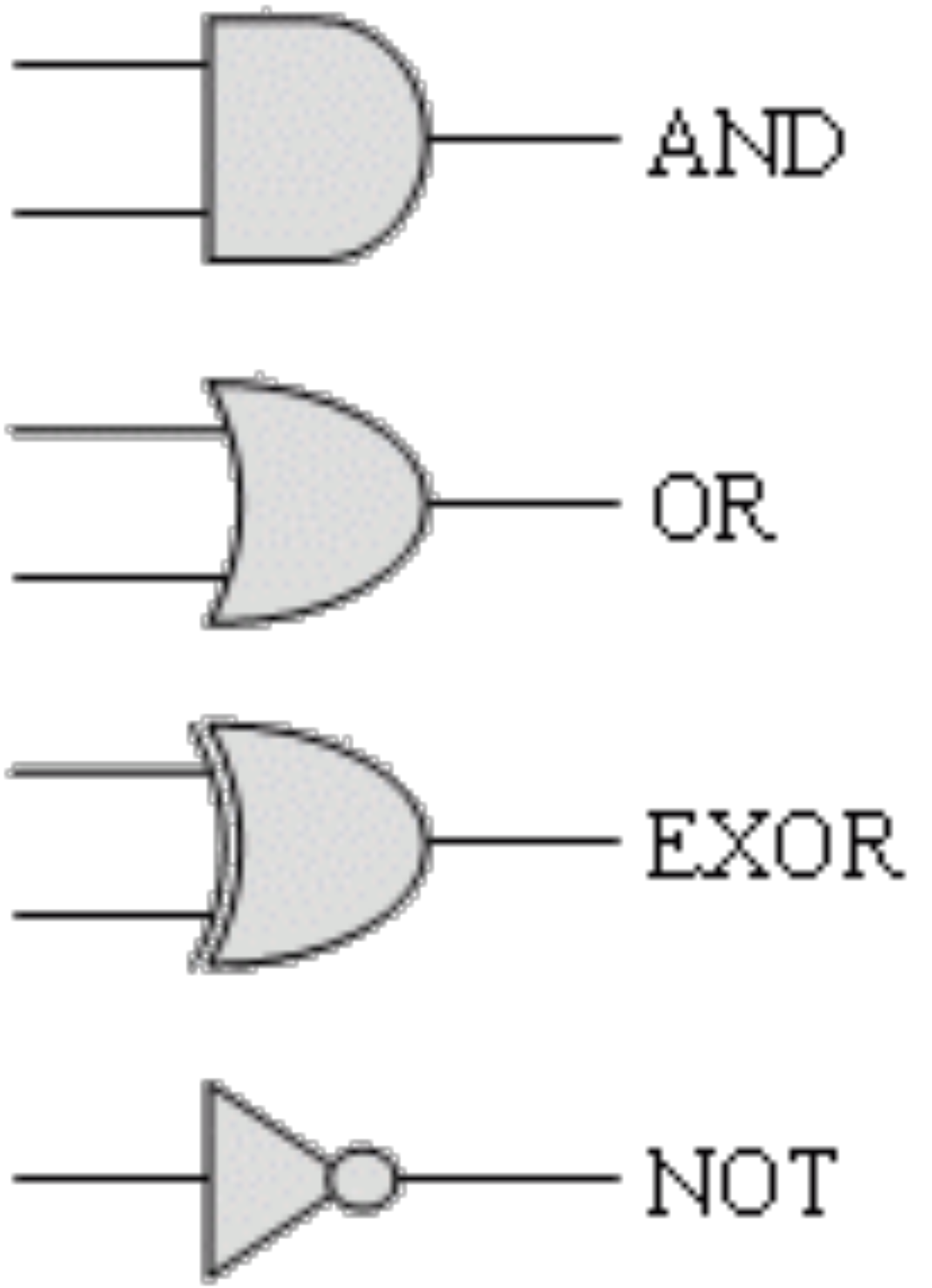
NOR

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

N(E)XOR

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

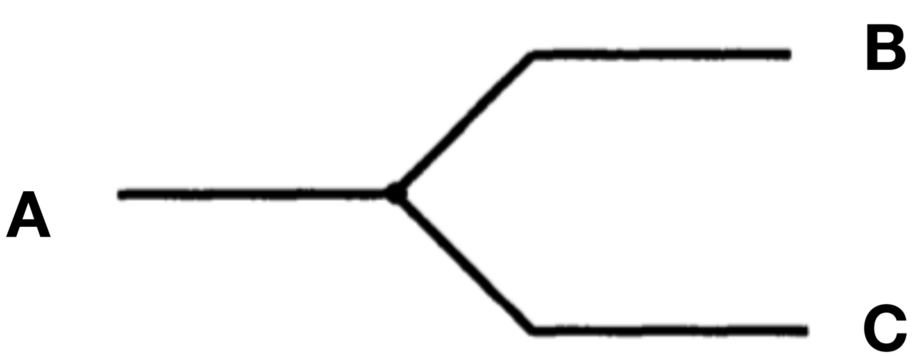
Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits



Diese Elemente werden auch Gatter (engl. gate) genannt.

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

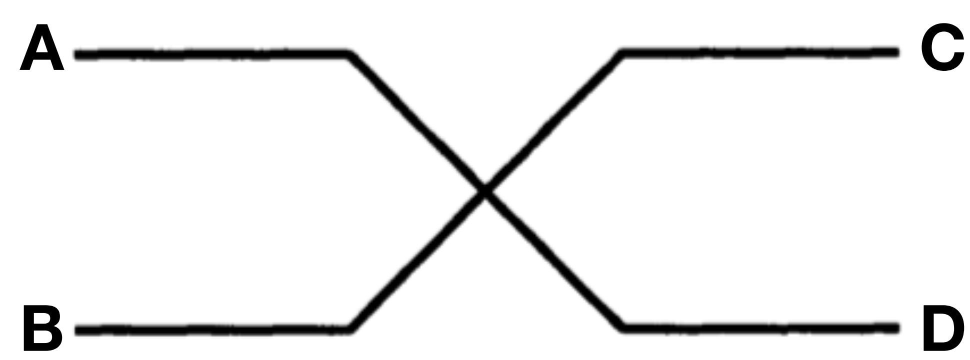
Beim Bauen von Schaltkreisen mit unseren Gates ergeben sich noch weitere Elemente, die wir auch als Gates auffassen können



FANOUT

A	B	C
0	0	0
1	1	1

Verbindung von Drähten



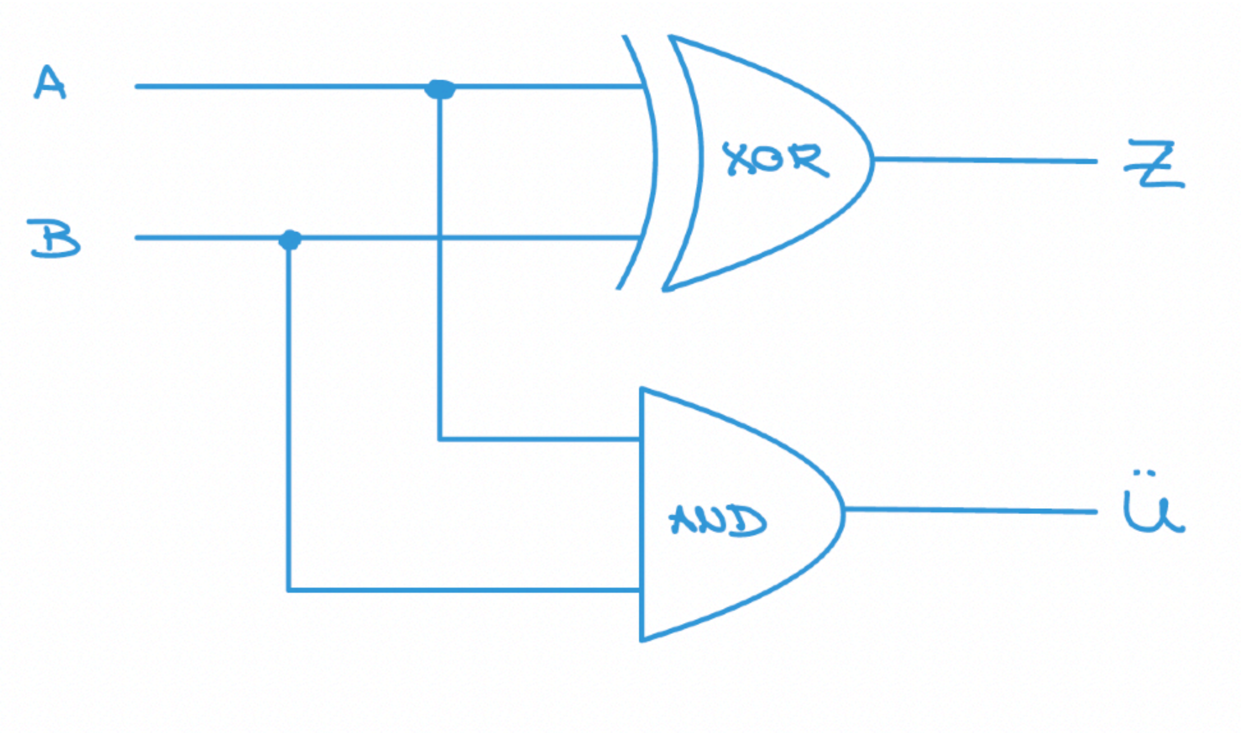
EXCHANGE

A	B	C	D
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Überkreuzung von Drähten

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Addierer



A	B	Z	Ü
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

XOR **AND**

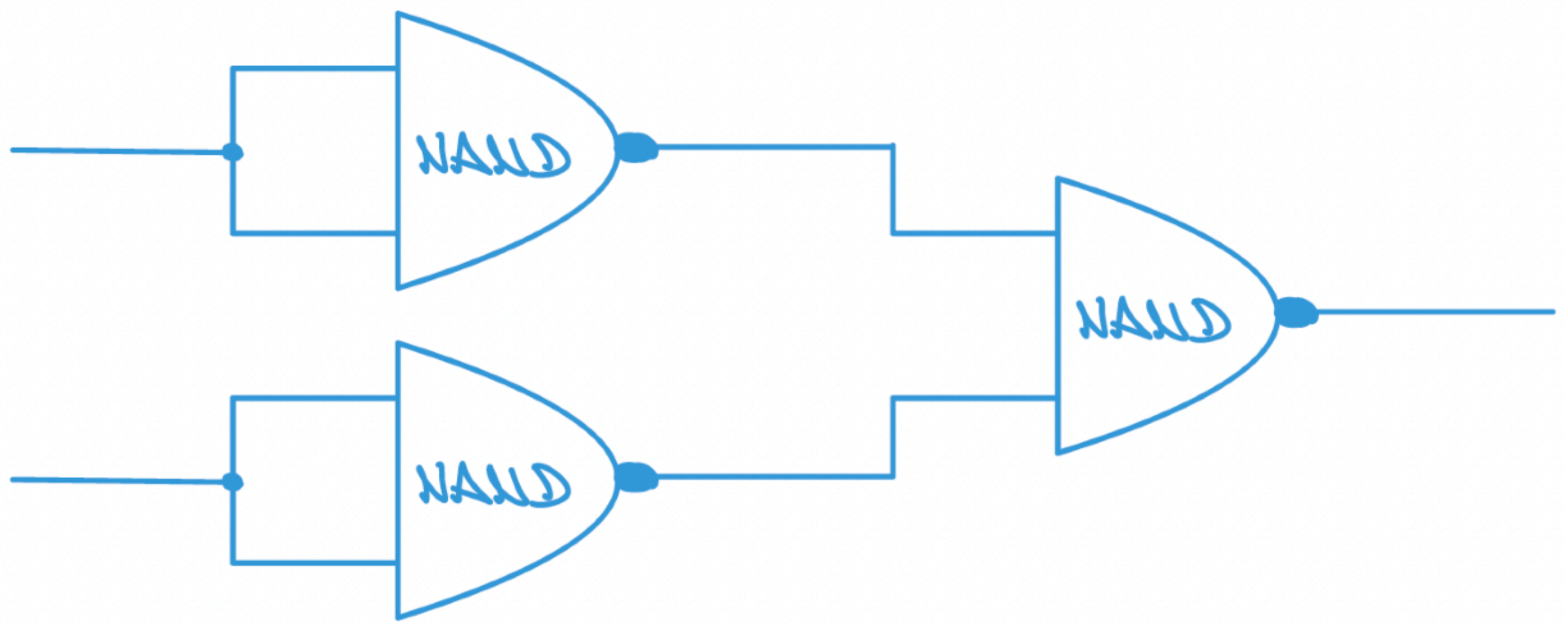
Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Sind alle Gates unabhängig oder gibt es ein universelles Gate?

Kann man ein NOT gate aus einem NAND gate bauen?

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Kann man ein OR gate aus NAND gates bauen?

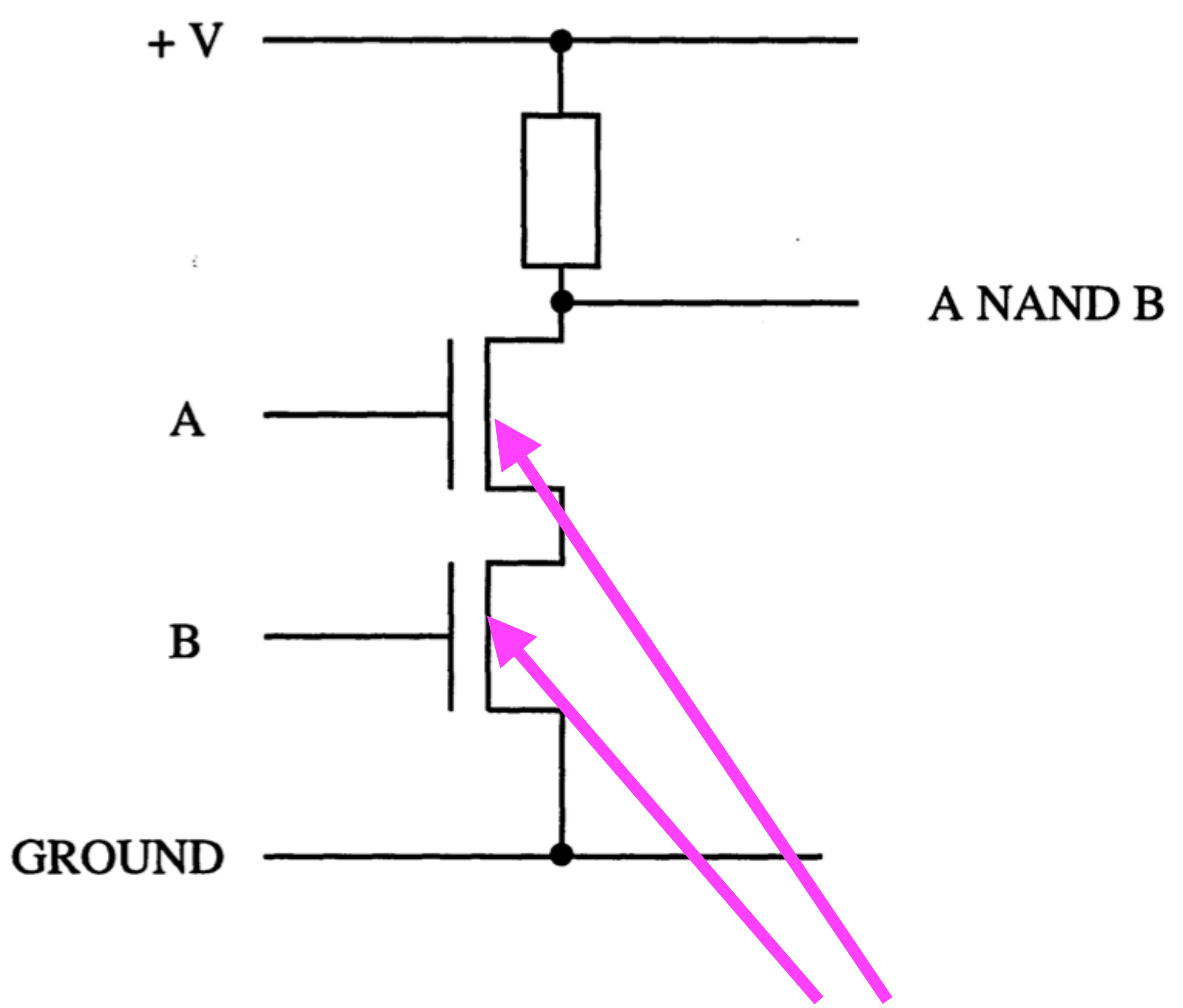


0 0	1 1	0	
0 1	1 0	1	≡ OR
1 0	0 1	1	
1 1	0 0	1	

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Man kann zeigen: das NAND gate ist ein universelles Gate!

Wie baut man so ein Gate?



Man braucht 2 Transistoren

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Damit sind wir mit dem klassischen Computing fertig und wir können im Prinzip die schnellsten Computer bauen…

In der Praxis gibt es da schon einige Probleme

Wdh.: Operationen mit 2 klassischen Bits

Reversibilität: kann man aus dem Ergebnis eines Gates auf die Ausgangsbits zurückschliessen?

AND

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(E)XOR

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

N(E)XOR

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NEIN!

Wdh.: Einführung

1. Was sind klassische Bits
2. Klassische Operatoren/Gates
3. Reversible Operatoren

Wdh.: Reversible Operationen

Reversibilität: kann man aus dem Ergebnis eines Gates auf die Ausgangsbits zurückschliessen?

AND, OR, XOR, NAND, NOR, NXOR sind irreversible gates
Ist der 2 Bit Addierer reversibel?

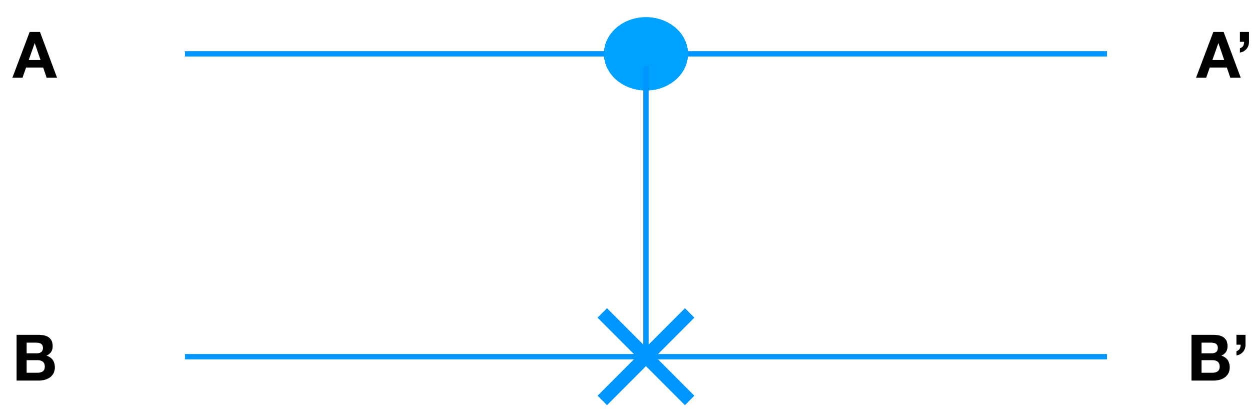
Gibt es reversible Gates?
Identität, NOT

Gibt es reversible 2 Bit gates?
Ja! Bennett, Fredkin

N	**NOT**
CN	**Controlled Not**
CCN	**Controlled Controlled Not**

Wdh.: Reversible Operationen

Reversible 2 Bit gates: Controlled NOT



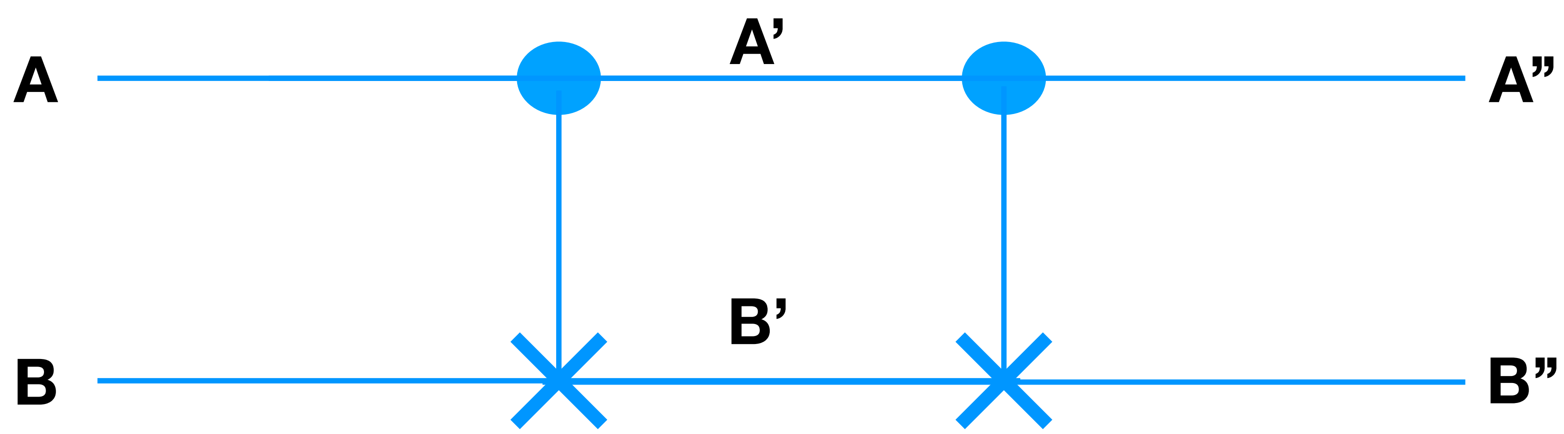
Die A-Linie ist immer die Identität
Wenn A = 0, dann ist die untere Linie die Identität
Wenn A = 1, dann ist die untere Linie die NOT Operation

A	B	A’	B’
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Ist das wirklich reversibel?

Wdh.: Reversible Operationen

Was macht dieses Gate?

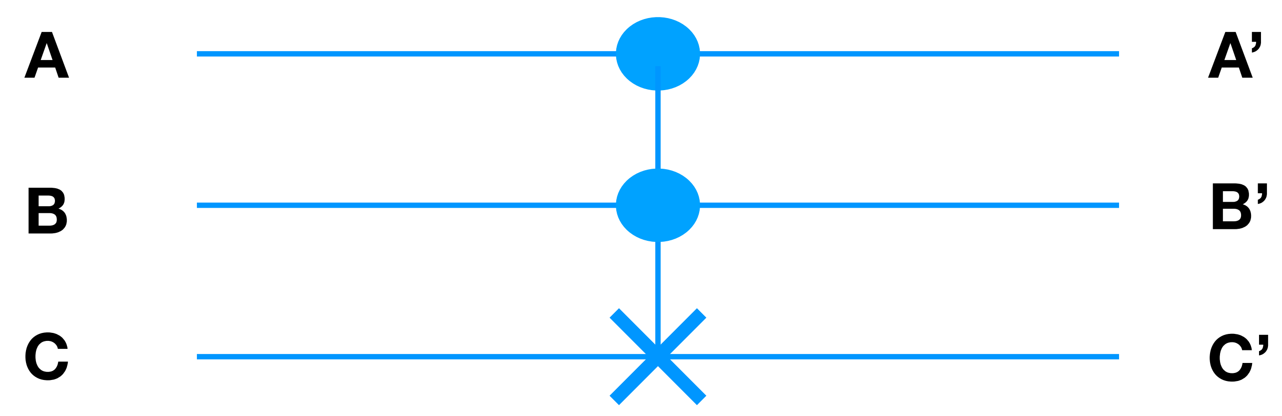


A	B	A’	B’	A”	B”
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1

Dies ist die Identität

Wdh.: Reversible Operationen

Reversibles 3 Bit gate: Controlled controlled NOT
Toffoli gate



Die A- und B-Linie ist immer die Identität
Wenn A = 1 = B, dann ist die untere Linie die NOT Operation,
Sonst ist die untere Linie die Identität

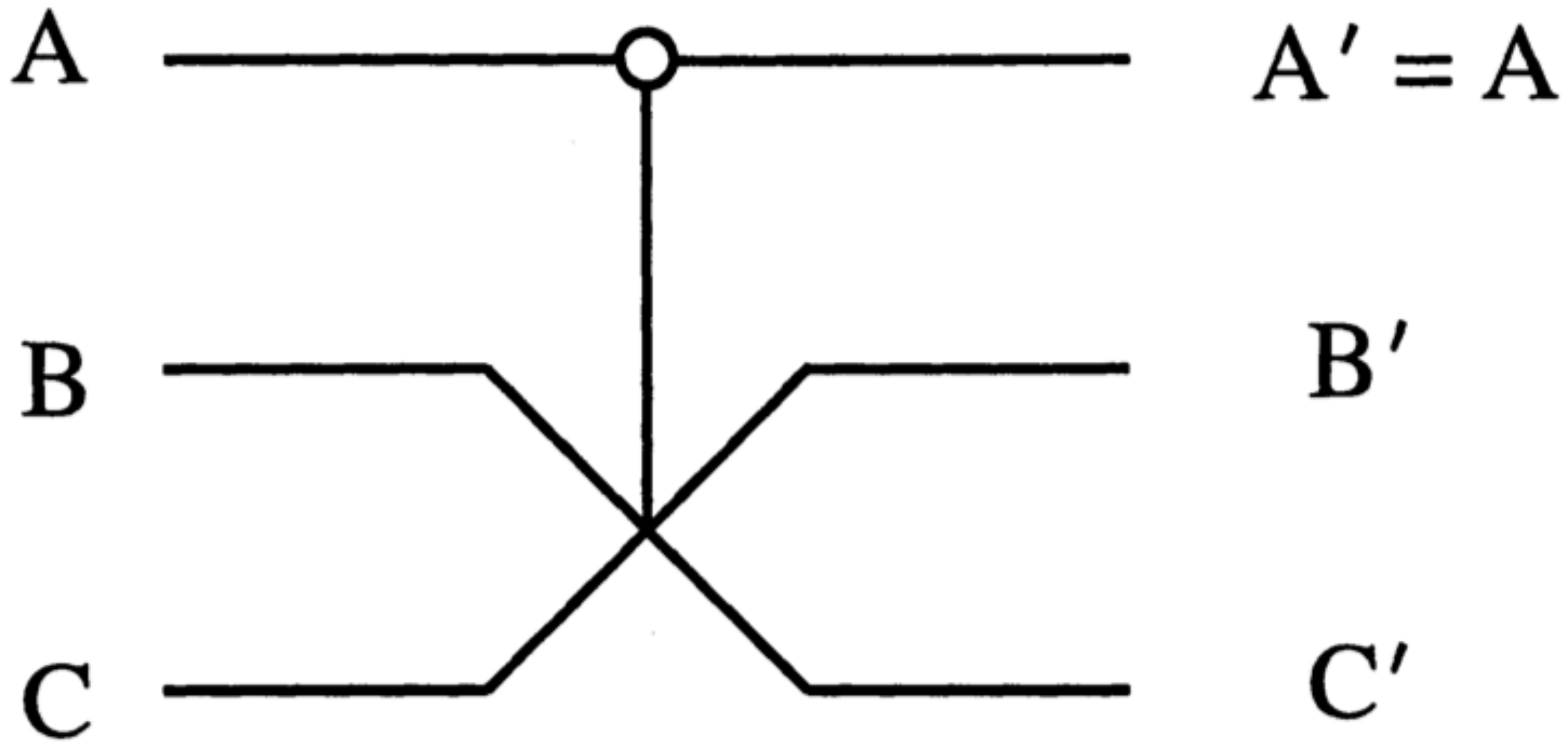
A	B	C	A'	B'	C'
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1

A	B	C	A'	B'	C'
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Ist das wirklich reversibel?

Wdh.: Reversible Operationen

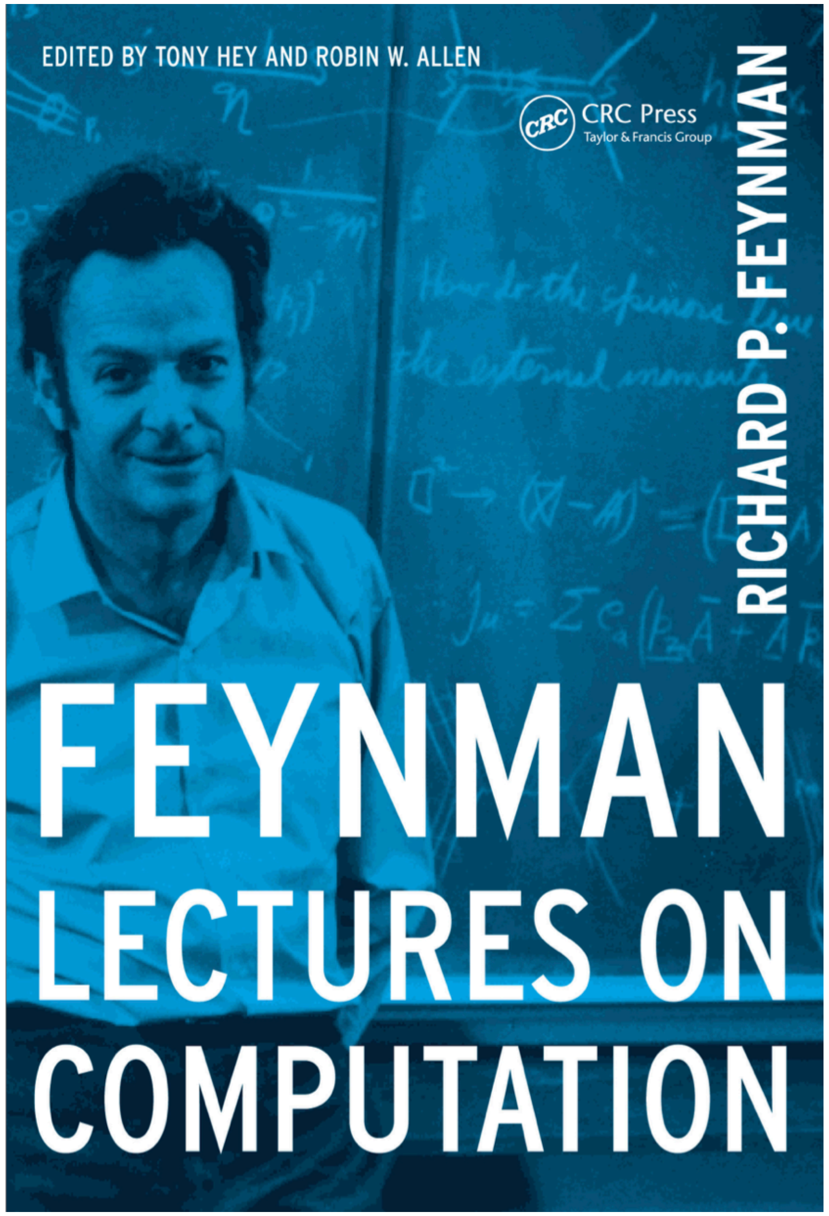
Reversibles 3 Bit gate: Controlled exchange
Fredkin gate



Wdh.: Reversible Operationen

Mit N, CN und CNN kann man alle Gates aufbauen

Für mehr Informationen in dieser Richtung



Jetzt kennen wir die Grundelemente eines klassischen Computer (Irreversible Gates) aber auch eines Quantencomputers (reversible Gates)

Quantencomputing

Für die Hintergründe/Grundlagen von Quantencomputing braucht man eigentlich Quantenmechanik

Wer sich dafür interessiert, kann sich die Folien vom letzten Semester unter https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/ ansehen

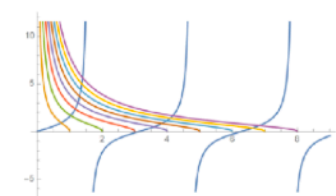
Wir gehen hier einen etwas anderen Weg

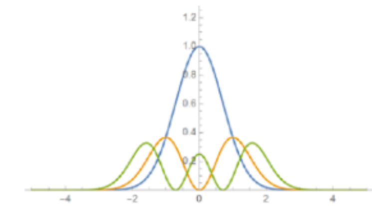
Universität Siegen

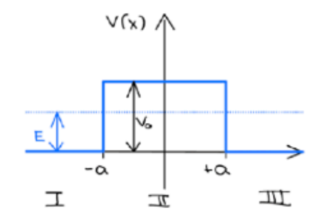
Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Ankündigung für das Sommersemester 2025
Das theoretische Minimum II
Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V







Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

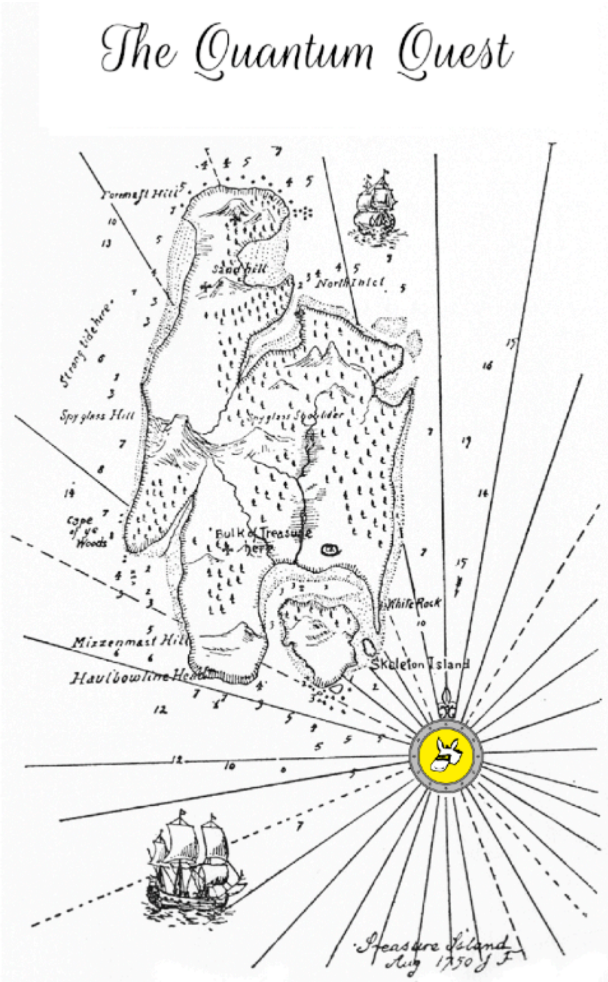
Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

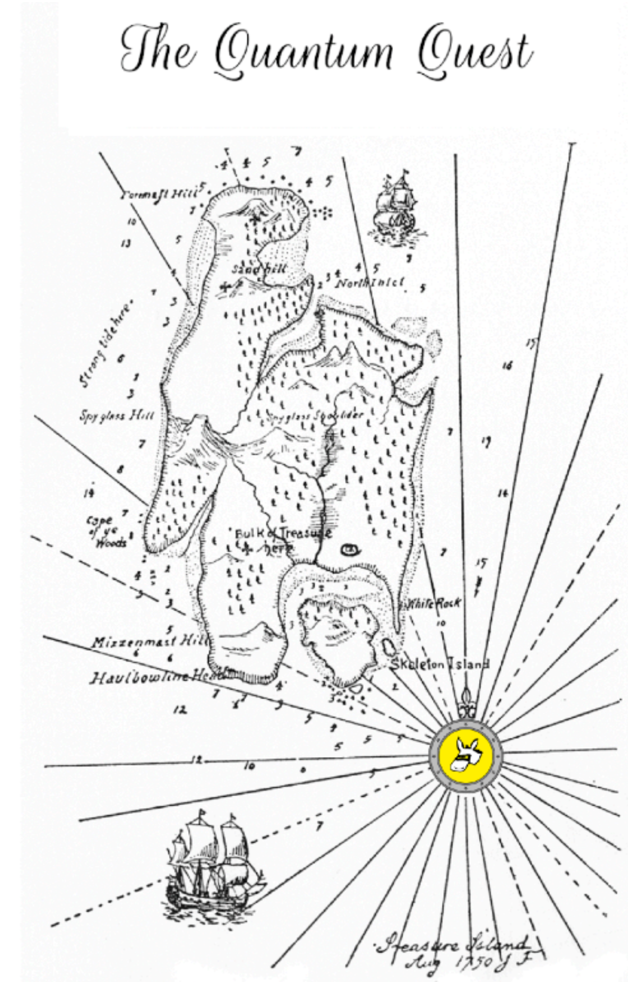
11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

SUBATOMIC HEROES



Ab heute:
Quantencomputing

Mittwochsakademie/ Begabte Siegen



angelehnt an
“The Quantum Quest“ von Maris Ozols & Michael Walter
https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/

Ziel dieser Vorlesung ist es
nicht-triviale Einblicke in die Grundprinzipien des
Quantencomputings zu geben,
sowie erste QC-Programme zu erstellen

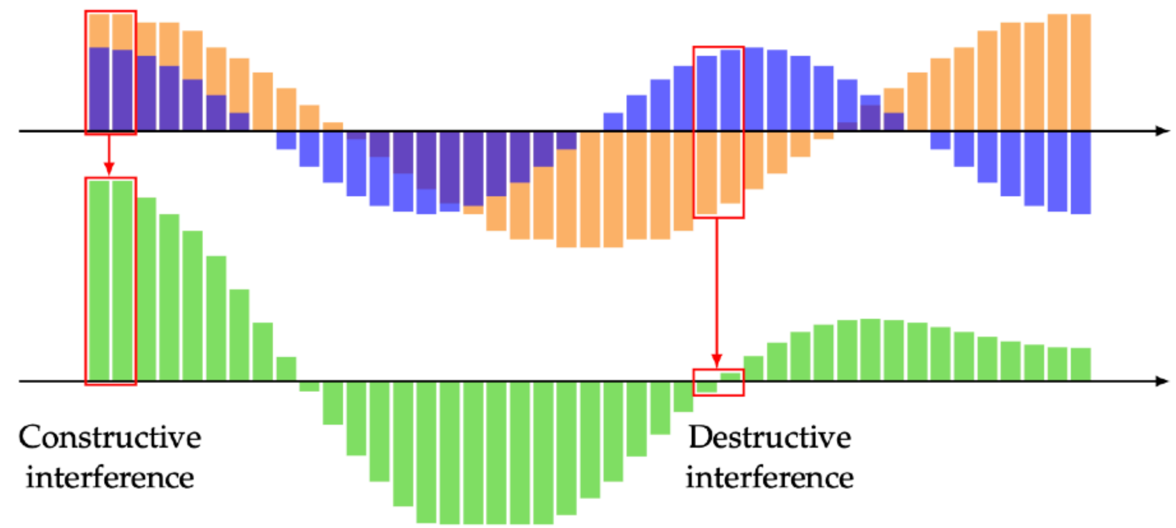
Vorlesung: Das theoretische Minimum

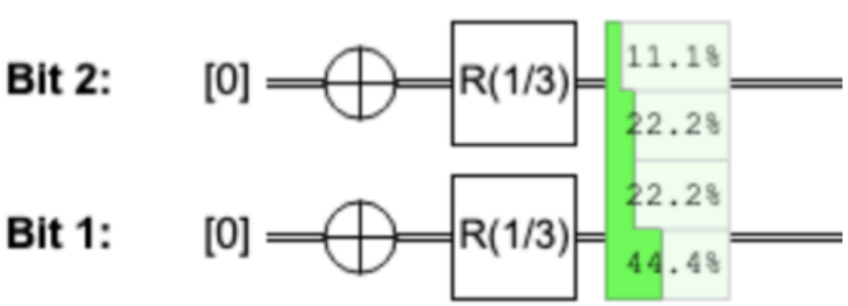
Mittwochsakademie

Ablauf

19.11.: Einführung
26.11.: Q1 Maestro der Wahrscheinlichkeit
3.12.: Q2a KEINE Vorlesung
10.12.: Q2b Das Qubit bezwingen
17.12.: Q3a Verzaubernde Verschränkungen 1

7. 1.: Q3b Verzaubernde Verschränkungen 2
14. 1.: Q4a Quantenkompositionen 1
21. 1.: Q4b Quantenkompositionen 2
28. 1.: Q5a Virtuose Algorithmen 1
4. 2.: Q5b Virtuose Algorithmen 2





$$
\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \\
&= |0\rangle .
\end{aligned}
$$

https://www.quantum-quest.org/quirky

Quantum Quest

Wir befinden uns im Jahre 2058

Quantencomputer sind überall

und wir begleiten Alice und Bob

Wie immer: es gibt auch Bösewichte:
The evil hacker Eve

Meister der Wahrscheinlichkeiten

In Herz der Quantenmechanik liegen Wahrscheinlichkeiten

1 Quest 1: Maestro der Wahrscheinlichkeit
1.1 Probabilistische Bits . . . .
1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten . . . .
1.1.2 Wahrscheinlichkeiten addieren . . . .
1.1.3 Wahrscheinlichkeiten und Berechnungen . . . .
1.2 Operationen auf probabilistischen Bits . . . .
1.2.1 Erweitern durch Linearität . . . .
1.2.2 Zufällige Operationen . . . .
1.3 Ein probabilistisches Bit messen . . . .
1.4 Der QUIRKY Simulator . . . .
1.4.1 Erste Schritte . . . .
1.4.2 Eigene Operationen erstellen . . . .
1.4.3 Eine mysteriöse Operation . . . .
1.5 Lösungen der Übungsaufgaben . . . .

1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

Beim Wurf einer (fairen) Münze erwarten wir gleichhäufig Kopf oder Zahl
Die Wahrscheinlichkeiten betragen dann Kopf: 0.5 Bzw. 50%, Zahl 0.5 bzw. 50%

1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

Beim Wurf einer (fairen) Münze erwarten wir gleichhäufig Kopf oder Zahl
Die Wahrscheinlichkeiten betragen dann Kopf: 0.5 Bzw. 50%, Zahl 0.5 bzw. 50%

Münzen könnten aber auch unfair (biased) sein

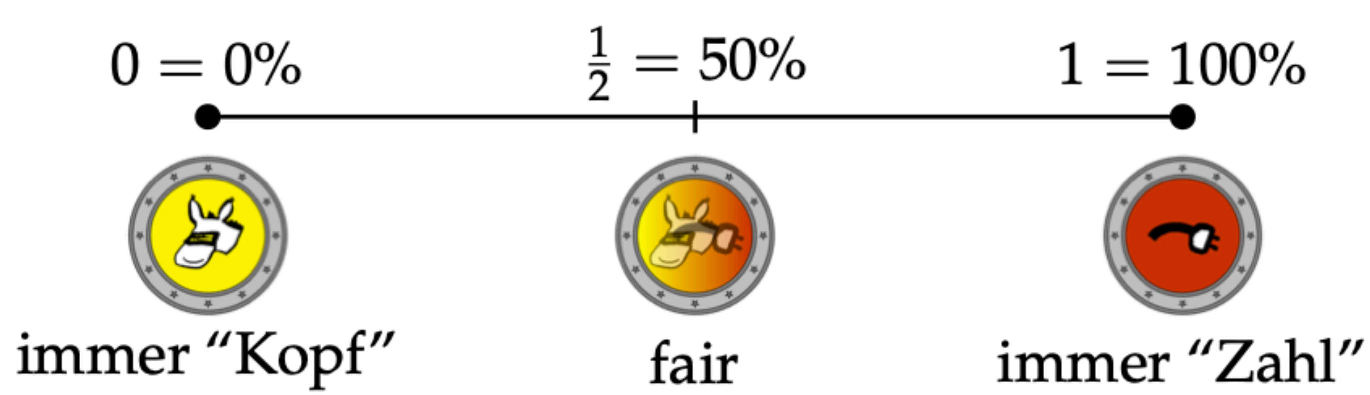
1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

Beim Wurf einer (fairen) Münze erwarten wir gleichhäufig Kopf oder Zahl
Die Wahrscheinlichkeiten betragen dann Kopf: 0.5 Bzw. 50%, Zahl 0.5 bzw. 50%

Münzen könnten aber auch unfair (biased) sein



Wahrscheinlichkeit für Zahl

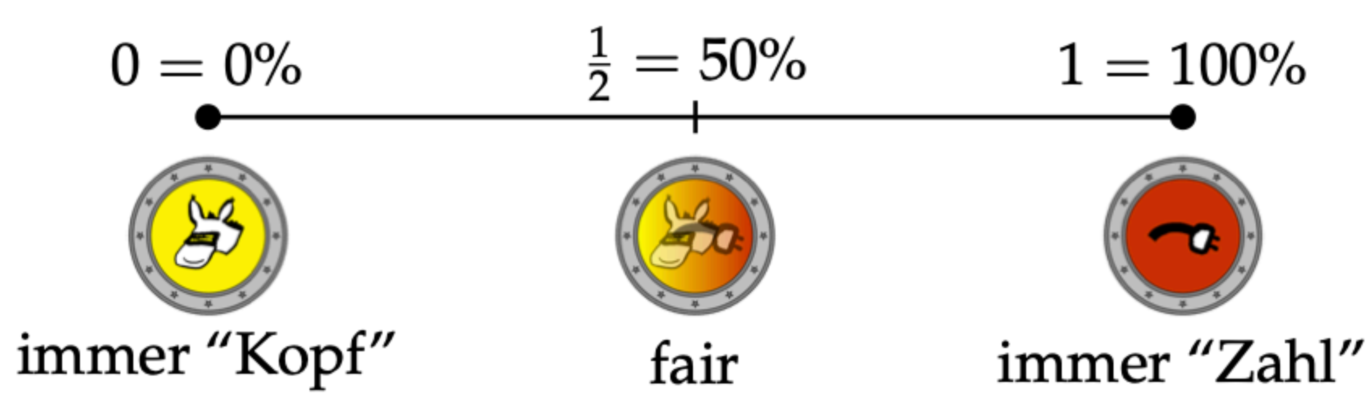
1.1 Probabilistische Bits

Wahrscheinlichkeiten bilden ein fundamentales Element der Quantentheorie, daher beschäftigen wir uns erst Mal damit - sobald wir Maestros der Warhscheinlichkeiten sind, wird alles einfacher :-)

Wahrscheinlichkeiten beschreiben wie häufig wir das Eintreten eines Ereignisses erwarten. Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann ordnen wir diesem die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100% zu

Beim Wurf einer (fairen) Münze erwarten wir gleichhäufig Kopf oder Zahl
Die Wahrscheinlichkeiten betragen dann Kopf: 0.5 Bzw. 50%, Zahl 0.5 bzw. 50%

Münzen könnten aber auch unfair (biased) sein



Wahrscheinlichkeit für Zahl

Eselkopf

Eselschwanz
Tail

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{Probabilistische Bit}$$

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{r}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{ Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_0

Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_1

$\Big\}$ **Probabilistische Bit**

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{ Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \frac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_0
Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit p_1 $\Bigg\}$ **Probabilistische Bit**

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

  Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{ Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

  Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.
  Vektornotation erlaubt graphische Darstellung und zeigt Parallelen zu Q-Bits auf

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{ Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

  Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.
  Vektornotation erlaubt graphische Darstellung und zeigt Parallelen zu Q-Bits auf
- **Zustände mit** $p_0 = 1$ **oder** $p_1 = 1$ **nennen wir deterministisch**

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{ Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \dfrac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

  Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.
  Vektornotation erlaubt graphische Darstellung und zeigt Parallelen zu Q-Bits auf
- **Zustände mit** $p_0 = 1$ **oder** $p_1 = 1$ **nennen wir deterministisch**

$$[0] := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [1] := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Probabilistische Bits

Wir abstrahieren nun die Münze

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Kopf -> Wert 0 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_0 \\ \textbf{Zahl -> Wert 1 eines Bits - Wahrscheinlichkeit } p_1\end{array}\right\} \textbf{Probabilistische Bit}$$

Beachte:

- **es gilt immer** $p_{0,1} \geq 0$**,** $p_0 + p_1 = 1$**,** $p_{0,1} \leq 1$
- **Bei einer fairen Münze haben wir** $p_0 = \frac{1}{2} = p_1$
- **Es genügt** p_0 **oder** p_1 **zu kennen**
- **Wahrscheinlichkeit kann als Vektor geschrieben werden** $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

  Dieser Vektor heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Zustand des probabilistischen Bits.
  Vektornotation erlaubt graphische Darstellung und zeigt Parallelen zu Q-Bits auf
- **Zustände mit** $p_0 = 1$ **oder** $p_1 = 1$ **nennen wir deterministisch**

$$[0] := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad [1] := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Immer Kopf **Immer Zahl**

1.1 Probabilistische Bits

- **Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände**

1.1 Probabilistische Bits

- Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände, d.h. jede beliebige Zustand kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden

1.1 Probabilistische Bits

- **Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände, d.h. jede beliebige Zustand kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden**

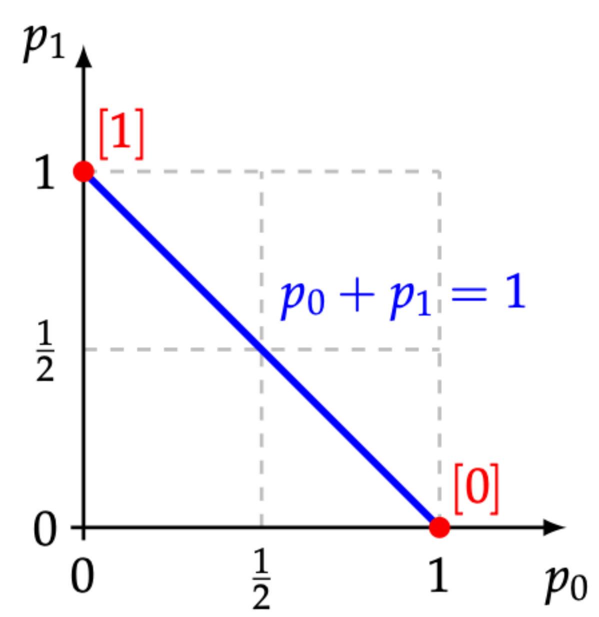
$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

1.1 Probabilistische Bits

- **Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände, d.h. jede beliebige Zustand kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden**

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Im 2-dimensionalen kann dieser Vektor dargestellt werden

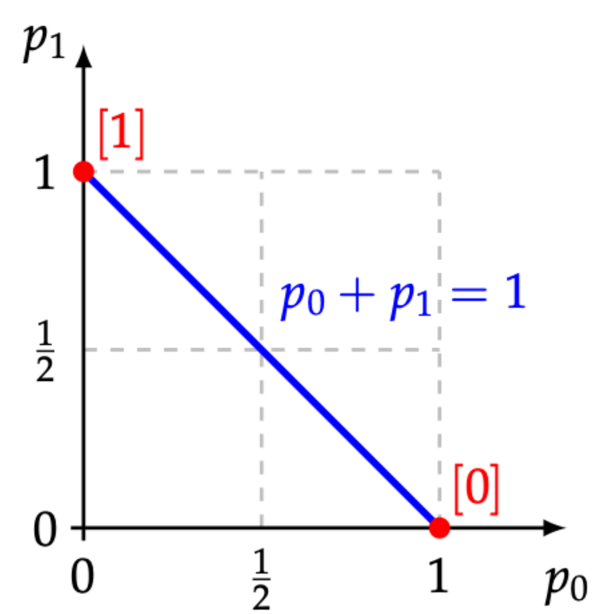


1.1 Probabilistische Bits

- **Die beiden Zustände [0] und [1] bilden eine Basis aller möglichen Zustände, d.h. jede beliebige Zustand kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden**

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]$$

Im 2-dimensionalen kann dieser Vektor dargestellt werden



Übungsaufgabe 1.1: Die blaue Strecke verstehen

Laut Abb. 1.2 bilden die möglichen Zustände eines probabilistischen Bits eine Strecke. Nimm dir etwas Zeit, um darüber nachzudenken, und versuche, folgende Fragen zu beantworten:

1. Warum liegen alle möglichen Zustände auf einer Strecke?
2. Warum hört die Strecke an den Koordinatenachsen auf und geht nicht weiter?
3. Welcher Punkt auf der Strecke entspricht einer fairen Münze?

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

Die Wahrscheinlichkeit für beide Male Kopf lautet: $p_{00} = a_0 b_0$
(es gilt: $p_{00} \leq a_0, \; p_{00} \leq b_0$)

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

Die Wahrscheinlichkeit für beide Male Kopf lautet: $p_{00} = a_0 b_0$

(es gilt: $p_{00} \leq a_0, \; p_{00} \leq b_0$)

Allgemeiner finden wir: $p_{ij} = a_i b_j$ **mit i,j, = 0,1**

1. Münze ergibt i **und 2. Münze ergibt** j

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

Die Wahrscheinlichkeit für beide Male Kopf lautet: $p_{00} = a_0 b_0$
(es gilt: $p_{00} \leq a_0, \ p_{00} \leq b_0$)

Allgemeiner finden wir: $p_{ij} = a_i b_j$ **mit i,j, = 0,1**

1. Münze ergibt i **und 2. Münze ergibt** j

2 Ereignisse heissen unabhängig wenn das Eintreten eines Ereignisses Nichts über das andere Ereignis aussagt: Beispiel ist Münzwurf

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte jetzt 2 Münzen, die durch die beiden probabilistischen Bits

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ **und** $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ **beschrieben werden**

Werden beide Münzen geworfen, dann gibt es die möglichen Ergebnisse
00, 01, 10, 11

Die Wahrscheinlichkeit für beide Male Kopf lautet: $p_{00} = a_0 b_0$

(es gilt: $p_{00} \leq a_0, \; p_{00} \leq b_0$)

Allgemeiner finden wir: $p_{ij} = a_i b_j$ **mit i,j, = 0,1**

1. Münze ergibt i **und 2. Münze ergibt** j

2 Ereignisse heissen unabhängig wenn das Eintreten eines Ereignisses Nichts über das andere Ereignis aussagt: Beispiel ist Münzwurf

Wenn wir wissen wollen, ob zwei unabhängige Ereignisse gleichzeitig eingetreten sind, multiplizieren wir die Einzelwahrscheinlichkeiten

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?

4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?
4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1) $\frac{1}{60}$

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?
4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1) $\frac{1}{60}$ **2) 00,10,20,30,40,50:** $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?
4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1) $\frac{1}{60}$ **2) 00,10,20,30,40,50:** $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ **3) 00,01,02,…,09:** $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0 ?
4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1) $\frac{1}{60}$ **2) 00,10,20,30,40,50:** $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ **3) 00,01,02,…,09:** $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

4) 1. Ziffer 0 und 2. Ziffer 0: $\frac{1}{10}\frac{1}{6} = \frac{1}{60}$

1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte wieder den Wurf von 2 Münzen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen?
Kopf-kopf oder Zahl-Zahl

1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte wieder den Wurf von 2 Münzen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen?
Kopf-kopf oder Zahl-Zahl

$$p_{\mathrm{Gleich}} = p_{00} + p_{11} = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte wieder den Wurf von 2 Münzen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen?
Kopf-kopf oder Zahl-Zahl

$$p_{\text{Gleich}} = p_{00} + p_{11} = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

Übungsaufgabe 1.3: Wahrscheinlichkeiten addieren

Bob sitzt ebenfalls gelangweilt im Mathematikunterricht. Ihm fällt auf, dass Alice auf ihre Uhr starrt – also wirft er auch einen Blick auf seine Uhr. Zu seiner Überraschung zeigt der Sekundenzeiger 44, was Bob unwahrscheinlich erscheint. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ziffern des Sekundenzeigers dieselben sind, wenn Bob zu einem zufälligen Zeitpunkt einer Minute auf seine Uhr schaut?

1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Betrachte wieder den Wurf von 2 Münzen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen?
Kopf-kopf oder Zahl-Zahl

$$p_{\text{Gleich}} = p_{00} + p_{11} = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

Übungsaufgabe 1.3: Wahrscheinlichkeiten addieren

Bob sitzt ebenfalls gelangweilt im Mathematikunterricht. Ihm fällt auf, dass Alice auf ihre Uhr starrt – also wirft er auch einen Blick auf seine Uhr. Zu seiner Überraschung zeigt der Sekundenzeiger 44, was Bob unwahrscheinlich erscheint. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ziffern des Sekundenzeigers dieselben sind, wenn Bob zu einem zufälligen Zeitpunkt einer Minute auf seine Uhr schaut?

00,11,22,33,44,55: $p = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0.1$

1.1.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Hausaufgabe 1.1: Gegenteilige Münzen

Alice wirft zwei Münzen a und b mit den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$a = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen die beiden Münzen auf *unterschiedlichen* Seiten?

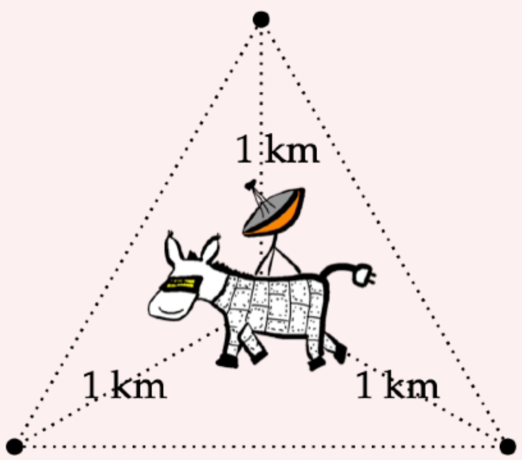
1.1.3 Wahrscheinlichkeiten und Berechnungen

Welchen Nutzen hat ein probabilistisches Bit? Normales Bit mit definitiv 0 oder 1 besser?

Hausaufgabe 1.2: Alice' Esel

Das Problem: Alice will ihren Eselsroboter so programmieren, dass er alleine zu einer Ladestation laufen kann, um sich dort aufzuladen. Es gibt drei Ladestationen in der Nähe. Sie sind alle jeweils 1 km vom Roboter entfernt und bilden ein gleichseitiges Dreieck – mit dem Esel in der Mitte. Der Roboter hat noch genügend Akku, um 2,8 km zu laufen.

Alice wird das Programm, welches den Roboter die Ladestation aussuchen lässt, per WiFi auf ihn hochladen. Sie weiß aber, dass ihre böse Klassenkameradin Eve sie sabotieren will. Da Eve das WiFi überwacht, kann sie den Programmcode mitlesen. Damit Eve nicht sehen kann, wohin der Esel läuft, schaltet Alice das WiFi des Roboters aus, sobald das Programm hochgeladen ist. Solange der Esel dann läuft, kann Eve ihn also nur sabotieren, indem sie Ladestationen hackt und deaktiviert. Sie kann allerdings nur zwei der drei Ladestationen deaktivieren, bevor sie entdeckt wird. Da Eve nicht sehen kann, wohin der Roboter läuft, muss sie sich also nur auf Grund von Alice' Programm entscheiden, welche zwei Ladestationen sie deaktivieren will.



Fragen:

1. Wie viele Ladestationen kann der Esel besuchen, bevor seine Batterie leer ist?

2. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass er die Ladestationen in einer festgelegten Reihenfolge besucht. Kann Eve verhindern, dass der Roboter eine funktionierende Station erreicht? Bedenke, dass Eve Alice' Programmcode mitlesen kann. Sie weiß also, in welcher Reihenfolge der Esel die Stationen ablaufen wird.

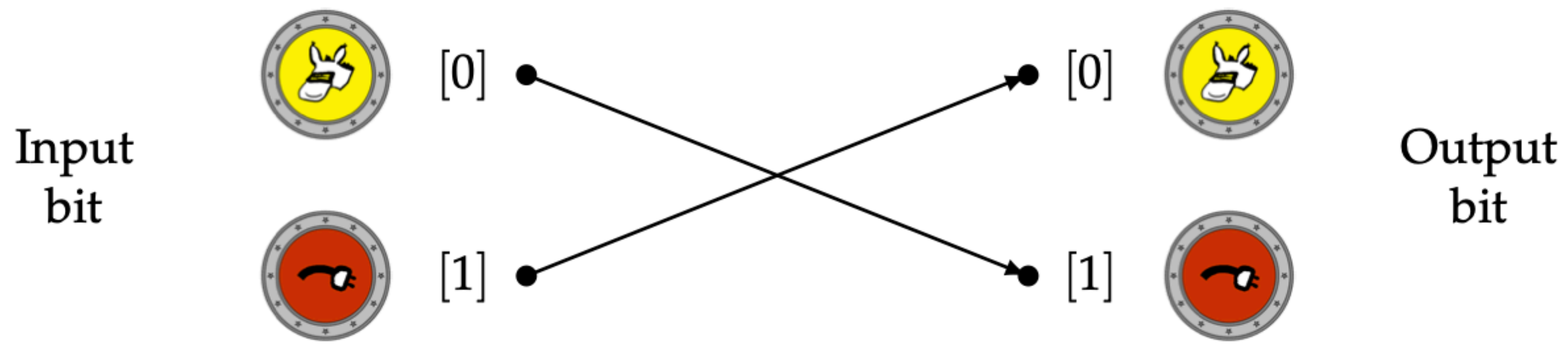
3. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass dieser selbst zufällig entscheiden kann, wo er hinwill. (Eve kann zwar sehen, was Alice programmiert hat, kann aber nicht vorhersehen, welche Entscheidungen der Esel trifft, sobald er anfängt loszulaufen.) Was für eine Strategie sollte Alice dem Esel einprogrammieren, und wie sollte Eve auswählen, welche Stationen sie deaktiviert, um dem entgegen zu wirken? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Esel eine funktionierende Ladestation erreichen, falls sowohl Alice als auch Eve bestmögliche Strategien verwenden?

1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Kopf und Zahl vertauschen:

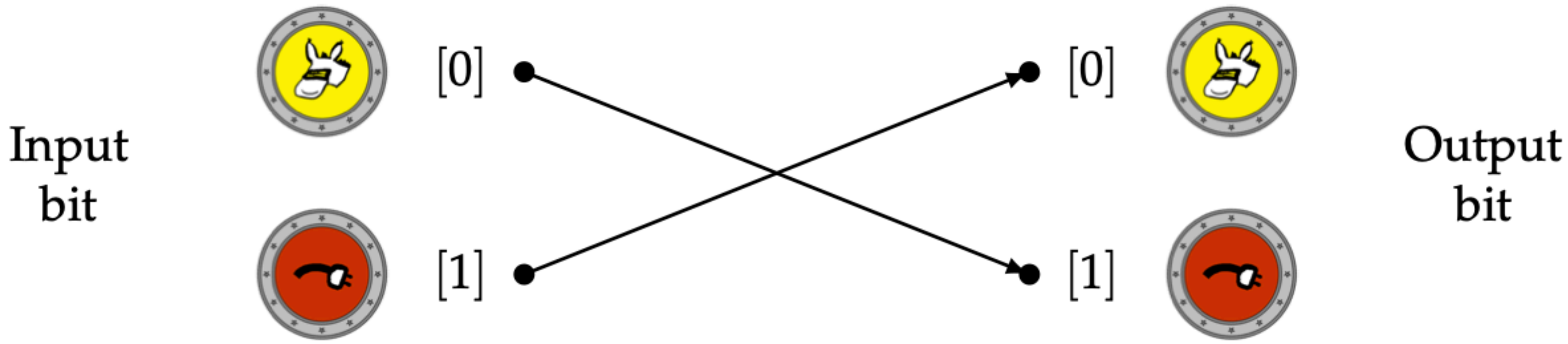
1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Kopf und Zahl vertauschen:



1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

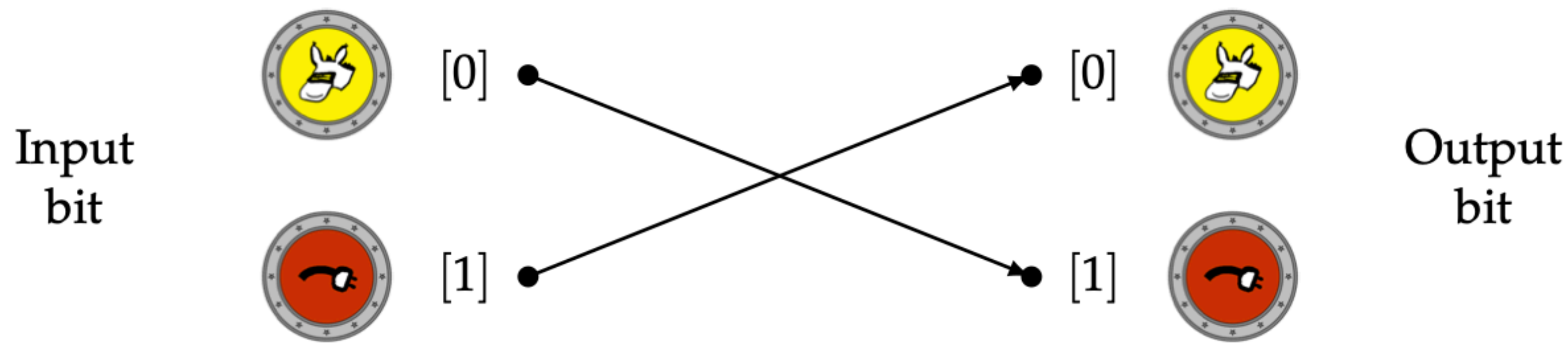
Kopf und Zahl vertauschen:



Wird als NOT-Operation bezeichnet:

1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

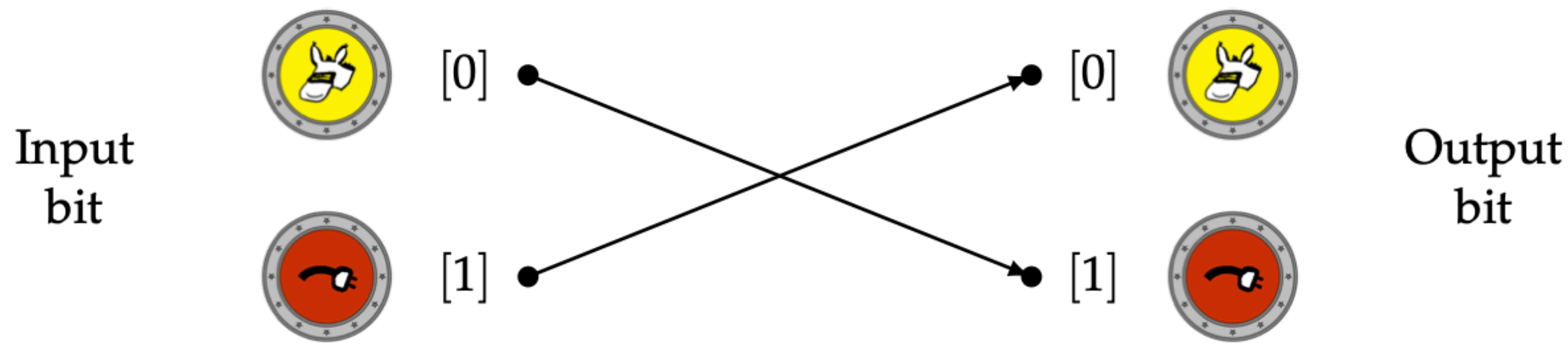
Kopf und Zahl vertauschen:



Wird als NOT-Operation bezeichnet:

1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Kopf und Zahl vertauschen:

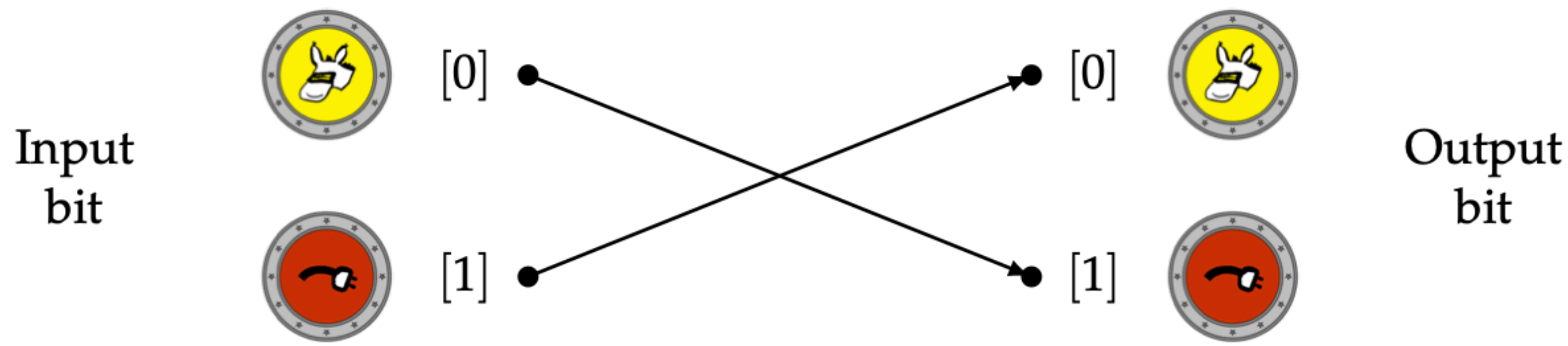


Wird als NOT-Operation bezeichnet:

$$\mathrm{NOT}\,[0] = [1], \qquad \mathrm{NOT}\,[1] = [0].$$

1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Kopf und Zahl vertauschen:



Wird als NOT-Operation bezeichnet:

$$\mathrm{NOT}\,[0] = [1], \qquad \mathrm{NOT}\,[1] = [0].$$

$$\mathrm{NOT}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

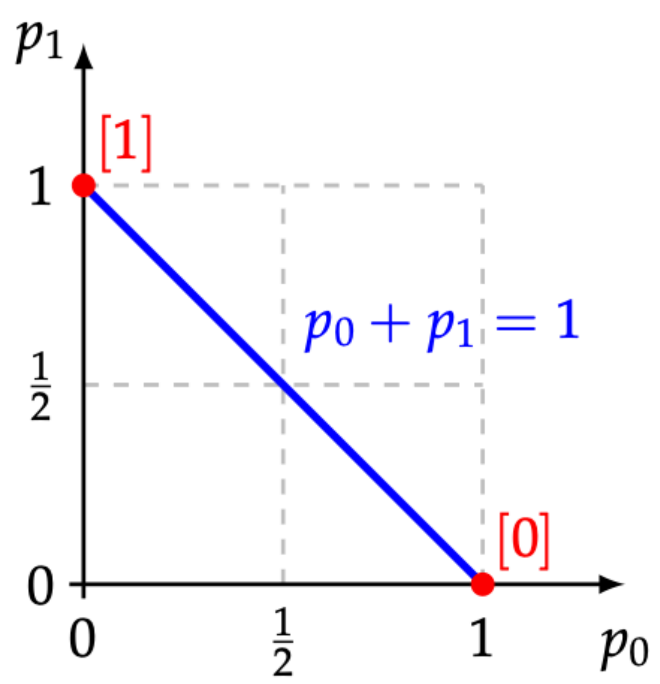
1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Übungsaufgabe 1.4: Die NOT Operation visualiseren

Wie wir in Abb. 1.2 gesehen haben, liegen alle möglichen Zustände eines probabilistischen Bits auf einer Strecke. Lass uns also versuchen zu verstehen, wie die NOT Operation diese Strecke transformiert oder verändert.

1. Such dir einen beliebigen[a] (engl. *arbitrary*) Punkt auf der Strecke mit Koordinaten (p_0, p_1). Wo landet dieser Punkt nachdem du die NOT Operation auf ihn angewandt hast?
2. Was passiert mit den zwei Endpunkten der Strecke?
3. Gibt es einen Punkt auf der Strecke, der auf sich selbst abgebildet wird?

[a] Hier bedeutet 'beliebig', dass deine Berechnungen für *jeden möglichen* Punkt gelten muss. Am einfachsten ist es meist, die Werte p_0 und p_1 bis zum Ende als unbekannte Zahlen zu behandeln.



1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0**

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0**
$\hat{M}[1]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 1**

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von** $\hat{M}$ **auf das Bit 0**
$\hat{M}[1]$ **bezeichnet die Auswirkung von** $\hat{M}$ **auf das Bit 1**

Mit Wahrscheinlichkeit p_0 **ist das Bit im Zustand 0 und wir erhalten** $\hat{M}[0]$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0
$\hat{M}[1]$ bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 1

Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit im Zustand 0 und wir erhalten $\hat{M}[0]$
Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit im Zustand 1 und wir erhalten $\hat{M}[1]$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0**
$\hat{M}[1]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 1**

Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit im Zustand 0 und wir erhalten $\hat{M}[0]$
Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit im Zustand 1 und wir erhalten $\hat{M}[1]$

Daher fordern wir

$$\hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \hat{M}[0] + p_1 \hat{M}[1]$$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Betrachten wir eine beliebige Operation $\hat{M}$ auf ein Bit

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{M}[0]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 0**
$\hat{M}[1]$ **bezeichnet die Auswirkung von $\hat{M}$ auf das Bit 1**

Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit im Zustand 0 und wir erhalten $\hat{M}[0]$
Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit im Zustand 1 und wir erhalten $\hat{M}[1]$

Daher fordern wir

$$\hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \hat{M}[0] + p_1 \hat{M}[1]$$

Übungsaufgabe 1.5: NOT auf probabilistischen Bits

Zeige, dass Gl. (1.11) zu Gl. (1.10) führt, wenn M die NOT Operation ist.

$$\hat{M} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \hat{M}[0] + p_1 \hat{M}[1] \qquad \text{NOT} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Wir können auch schreiben

$$\hat{M}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \hat{M}\left(p_0[0] + p_1[1]\right) = p_0\hat{M}[0] + p_1\hat{M}[1]$$

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Wir können auch schreiben

$$\hat{M}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \hat{M}\left(p_0[0] + p_1[1]\right) = p_0\hat{M}[0] + p_1\hat{M}[1]$$

Mathematisch definiert dies

eine lineare Abbildung $\hat{M}$ im Raum der 2-er Vektoren $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ **und** $\hat{M}[1]$
die deterministischen Zustände $[1]$ **und** $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ **und** $\hat{M}[1]$
probabilistische Bits

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ **und** $\hat{M}[1]$
die deterministischen Zustände $[1]$ **und** $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ **und** $\hat{M}[1]$
probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ **eine zufällige Operation**

Beispiel: Bleistift auf Tisch
$[0]$**: Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

1.2.2 Zufällige Operationen

Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$**: Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$**: Bleistift steht auf der Spitze**

1.2.2 Zufällige Operationen

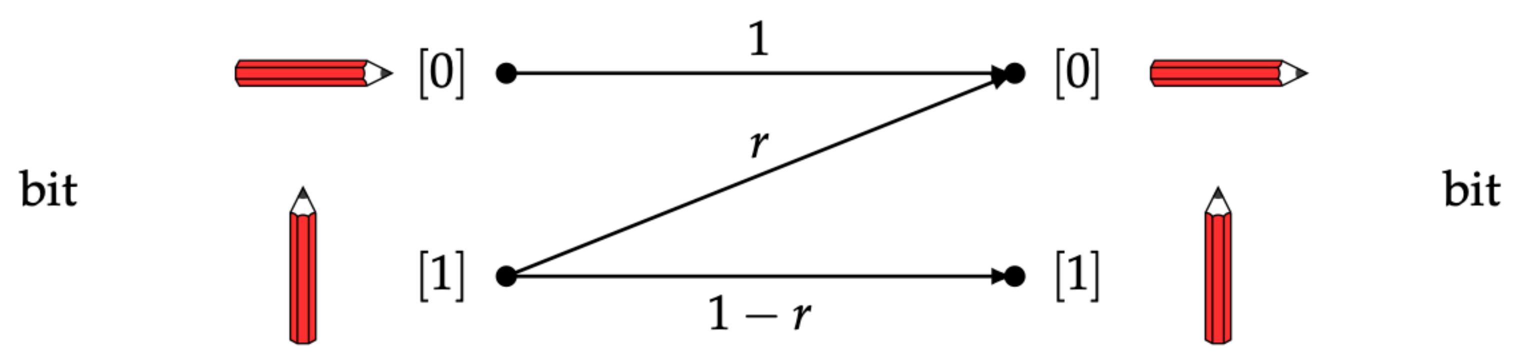
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

1.2.2 Zufällige Operationen

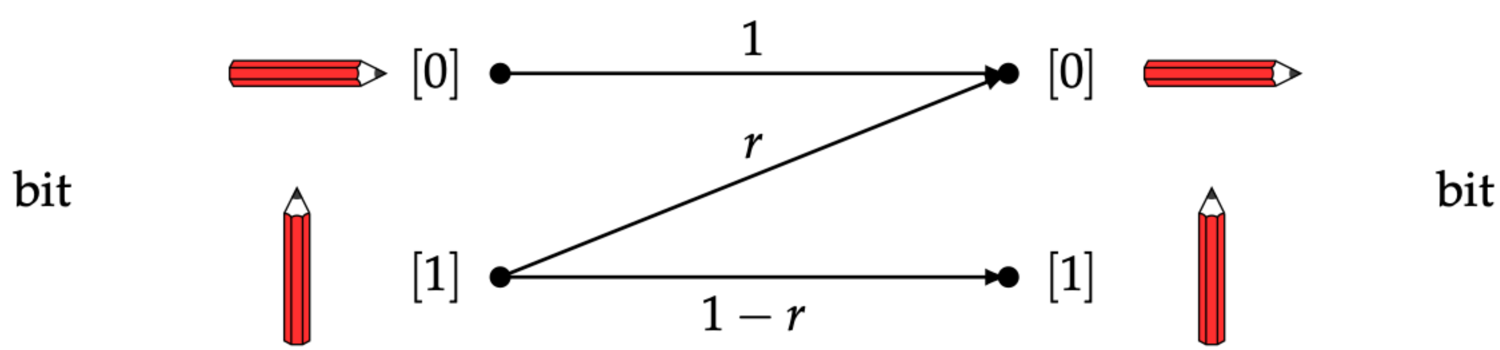
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

$[0]$: **Bleistift bleibt flach liegen**

1.2.2 Zufällige Operationen

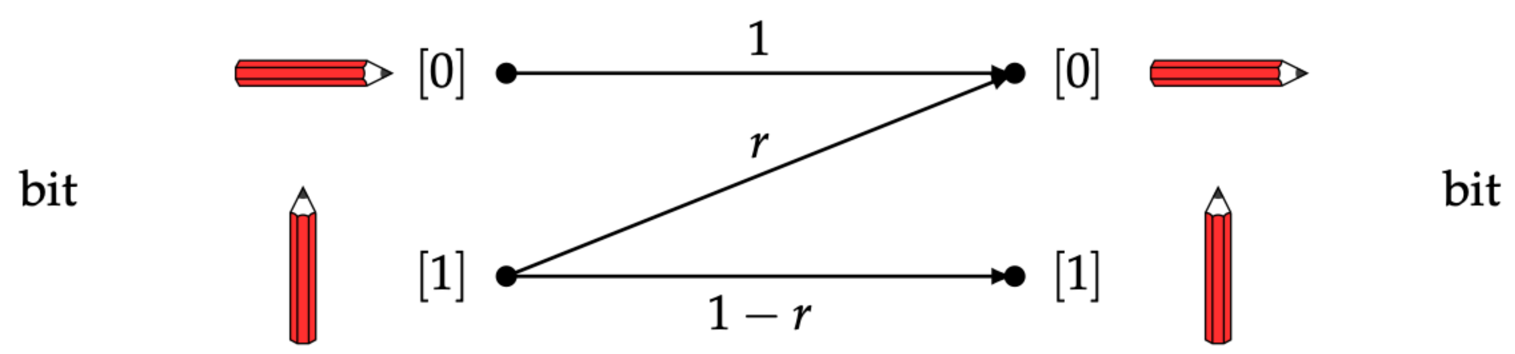
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

$[0]$: **Bleistift bleibt flach liegen**

$[1]$: **Bleistift fällt mit Wahrscheinlichkeit r um,**

1.2.2 Zufällige Operationen

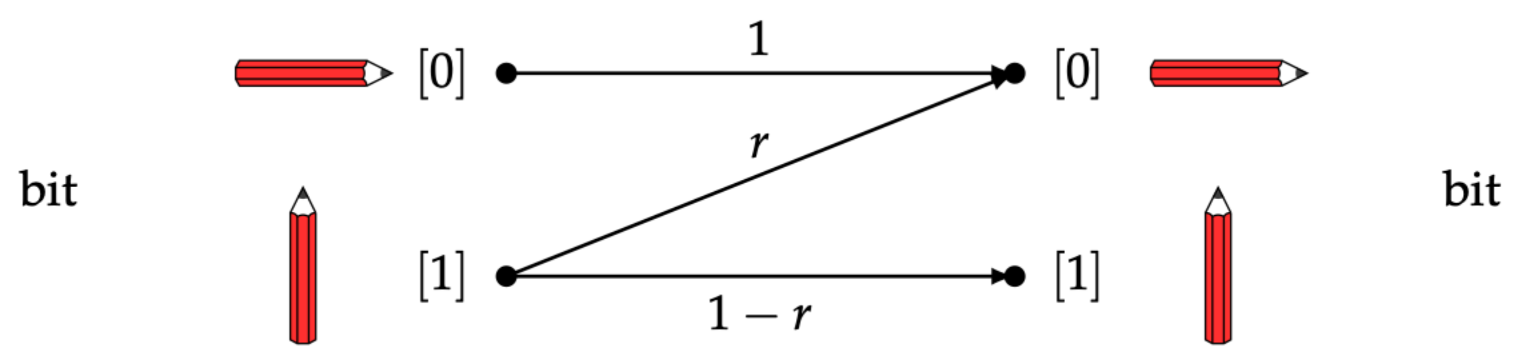
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

$[0]$: **Bleistift bleibt flach liegen**

$[1]$: **Bleistift fällt mit Wahrscheinlichkeit r um,**
bleibt mit Wahrscheinlichkeit $1 - r$ stehen

1.2.2 Zufällige Operationen

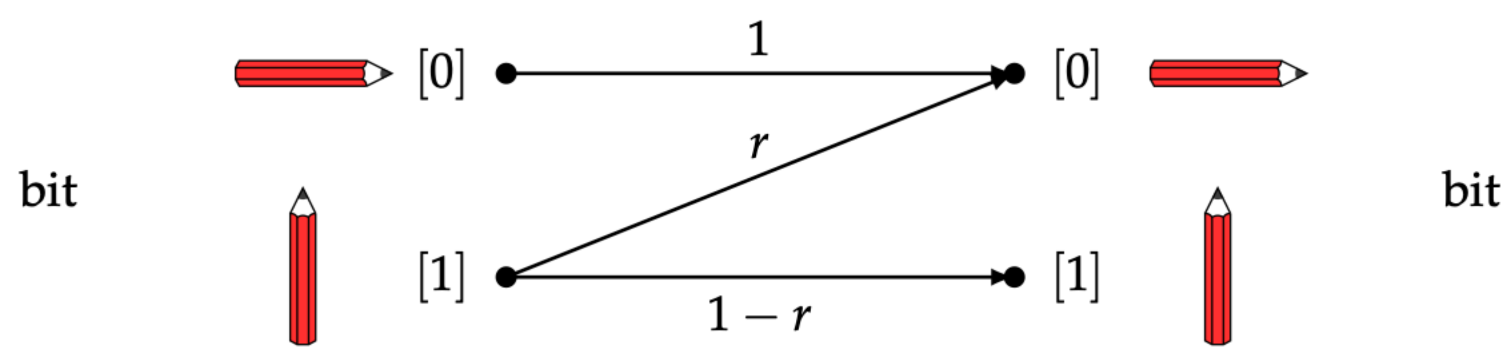
Im Falle der NOT Operation sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ die deterministischen Zustände $[1]$ und $[0]$

Im allgemeinen Fall sind $\hat{M}[0]$ und $\hat{M}[1]$ probabilistische Bits -> dann nennen wir $\hat{M}$ eine zufällige Operation

Beispiel: Bleistift auf Tisch

$[0]$: **Bleistift liegt flach auf dem Tisch**

$[1]$: **Bleistift steht auf der Spitze**



Operation: Probabilistisches Reset $\hat{R}(r)$: Schlagen auf den Tisch

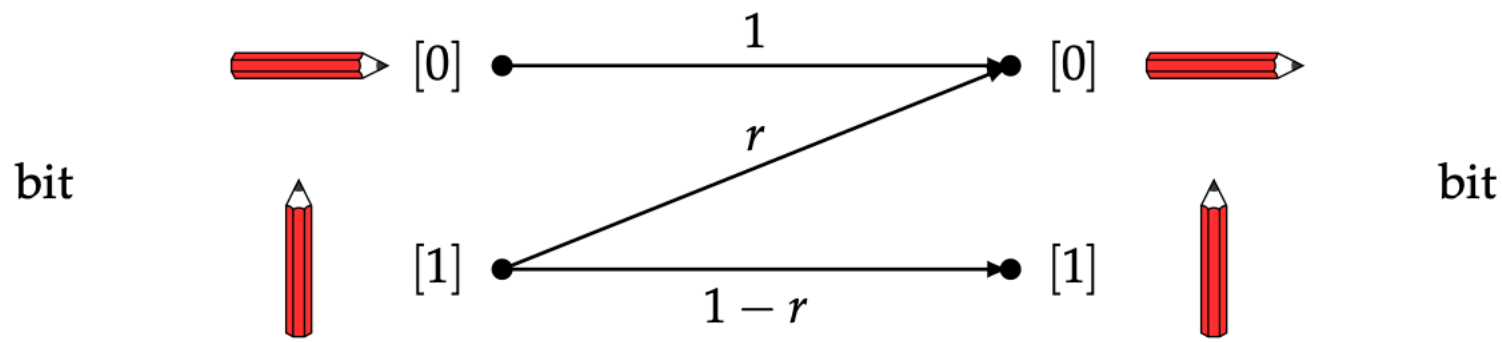
$[0]$: **Bleistift bleibt flach liegen**

$[1]$: **Bleistift fällt mit Wahrscheinlichkeit r um, bleibt mit Wahrscheinlichkeit $1 - r$ stehen**

r **hängt von der Stärke des Schlages ab**

1.2.2 Zufällige Operationen

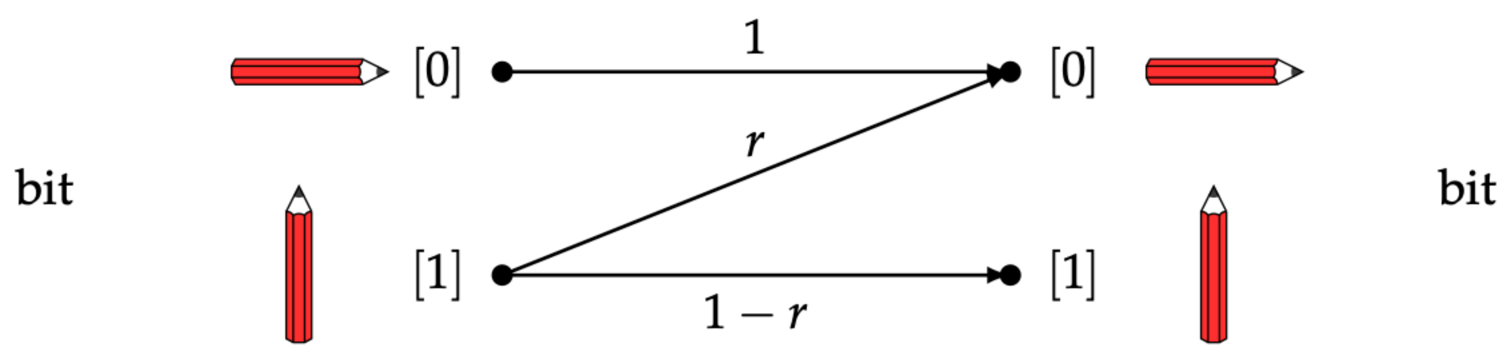
Mathematisch lautet



.

1.2.2 Zufällige Operationen

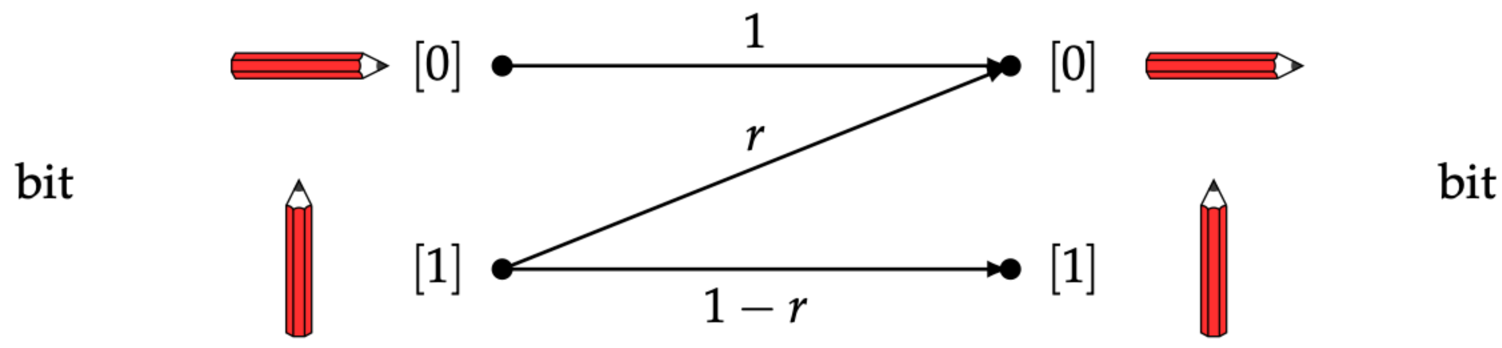
Mathematisch lautet



$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Zufällige Operationen

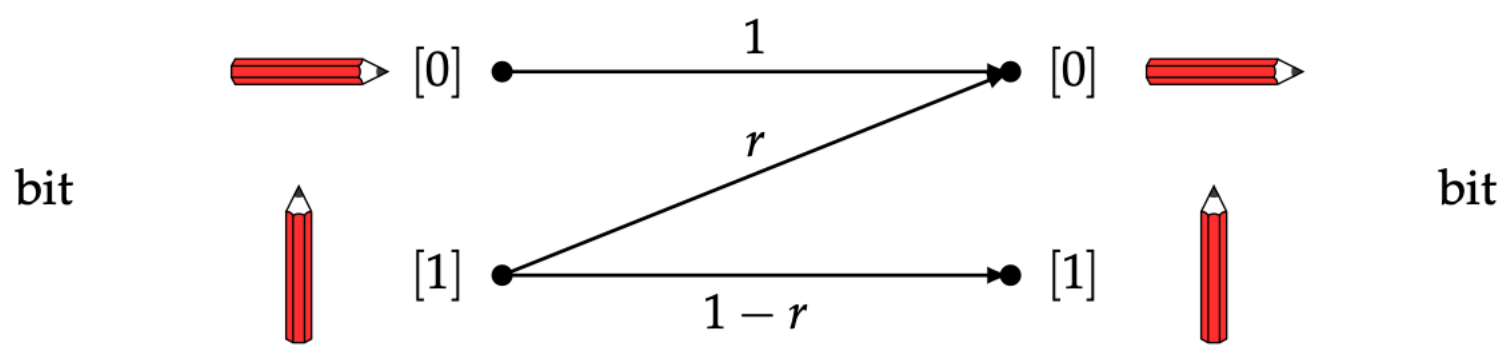
Mathematisch lautet



$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet

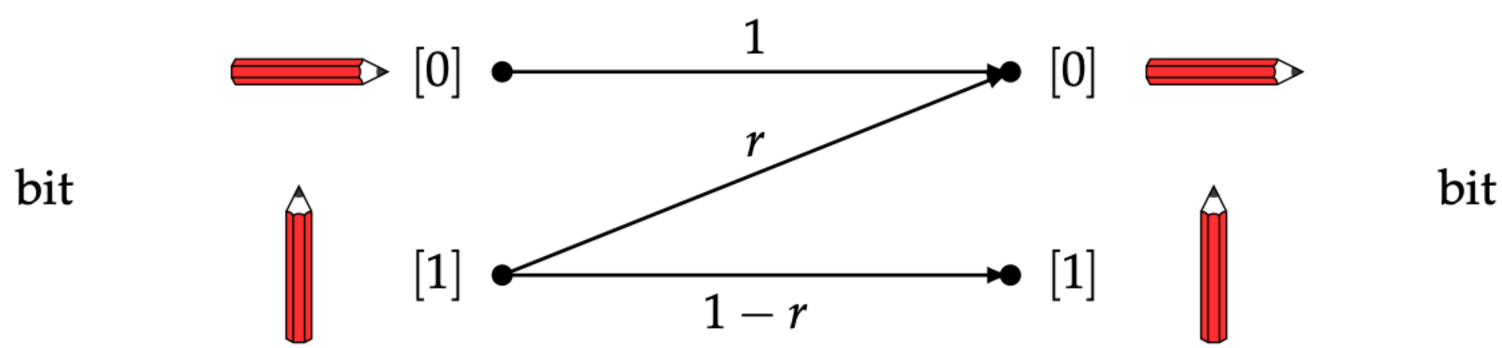


$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



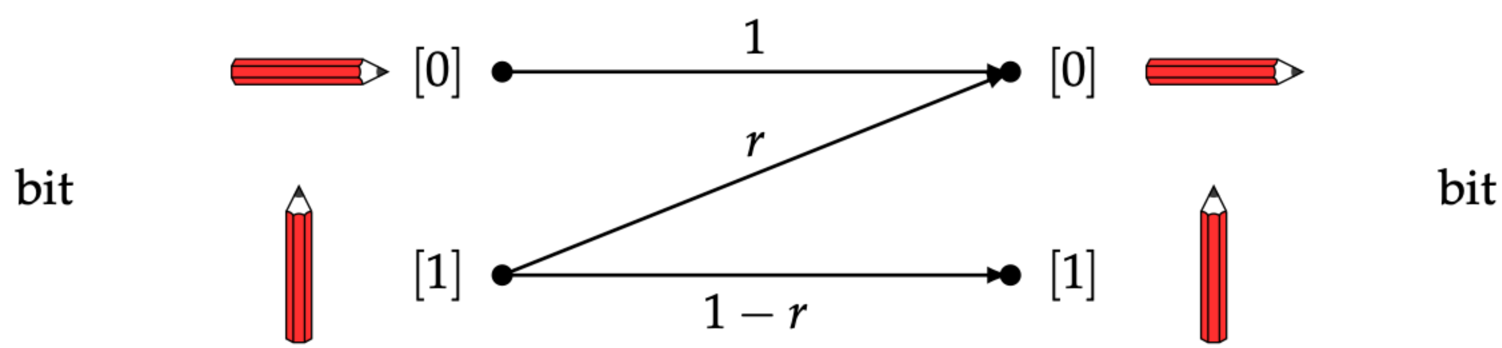
$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



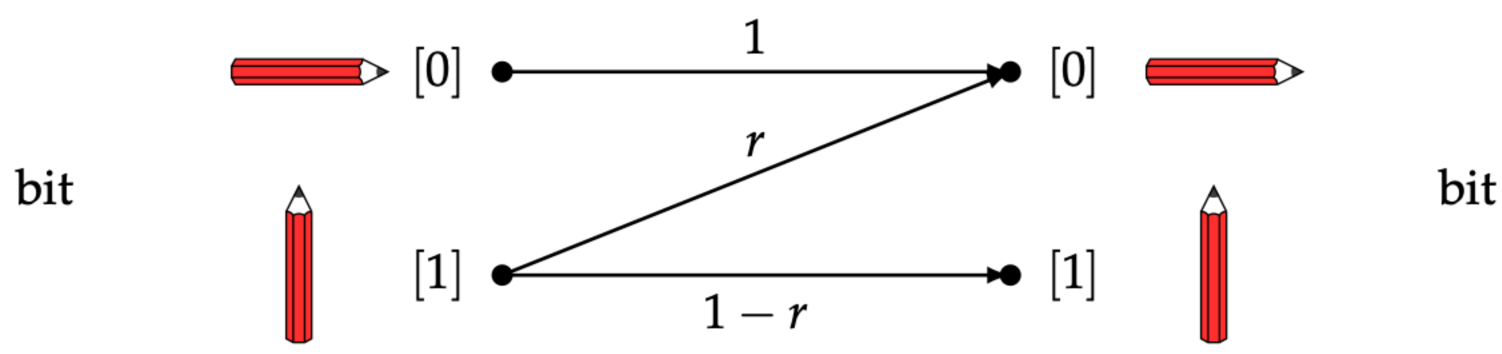
$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\hat{R}(r)[0] + p_1\hat{R}(r)[1]$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



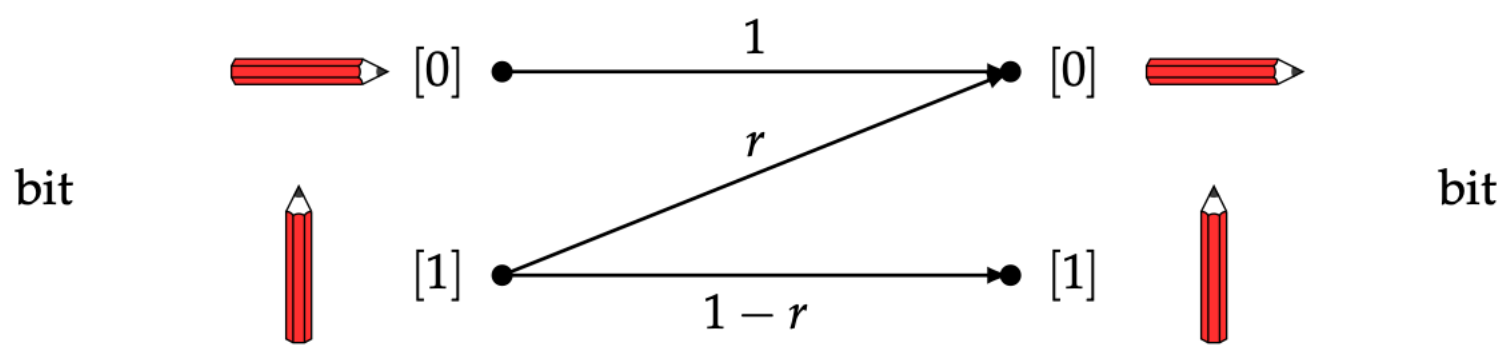
$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\hat{R}(r)[0] + p_1\hat{R}(r)[1] \quad = p_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



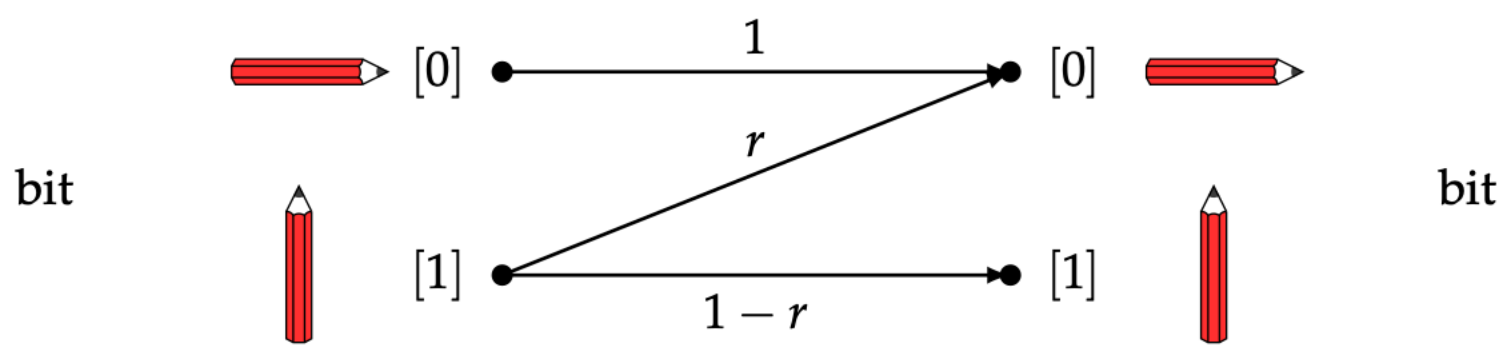
$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\hat{R}(r)[0] + p_1\hat{R}(r)[1] \quad = p_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 r \\ p_1(1-r) \end{pmatrix}$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Mathematisch lautet



$$\hat{R}(r)[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \hat{R}(r)[1] = r[0] + (1-r)[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

Durch die Forderung der Linearität finden wir die Wirkung auf ein allgemeines probablilistisches Bit:

$$\hat{R}(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\hat{R}(r)[0] + p_1\hat{R}(r)[1] \quad = p_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 r \\ p_1(1-r) \end{pmatrix}$$

Betrachte die Sonderfälle $r = 0$ und r = 1

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: **probabilistischer Flip** $\hat{F}(f)$

.

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: **probabilistischer Flip** $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f **(Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt**

.

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: probabilistischer Flip $\hat{F}(f)$

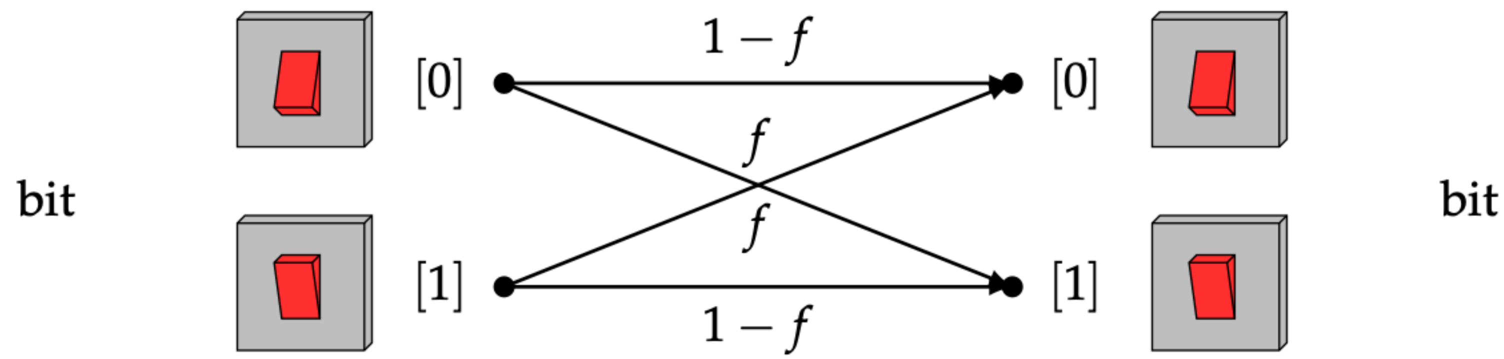
Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1 - f$ passiert nichts

.

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: **probabilistischer Flip** $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ passiert nichts

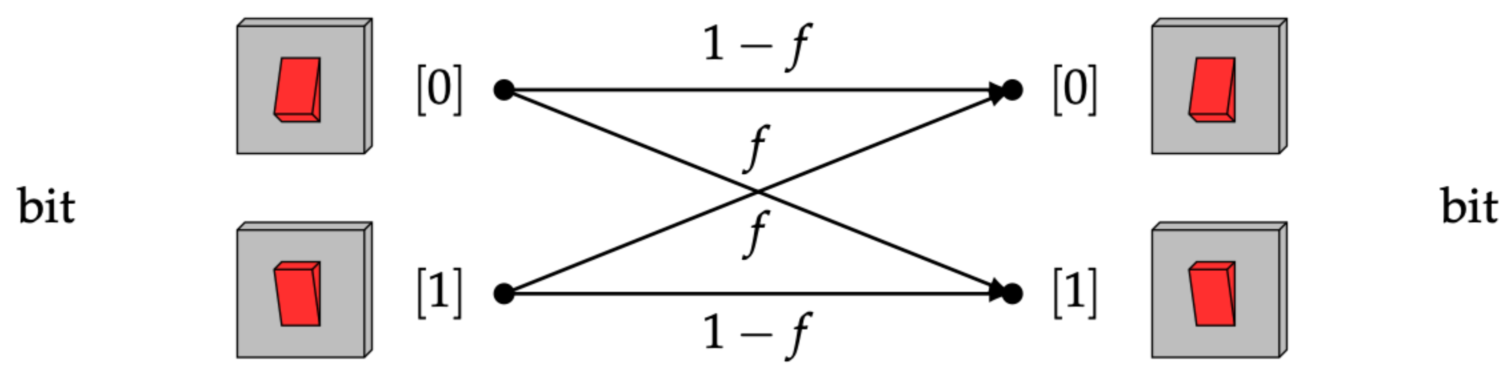


.

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: probabilistischer Flip $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ passiert nichts

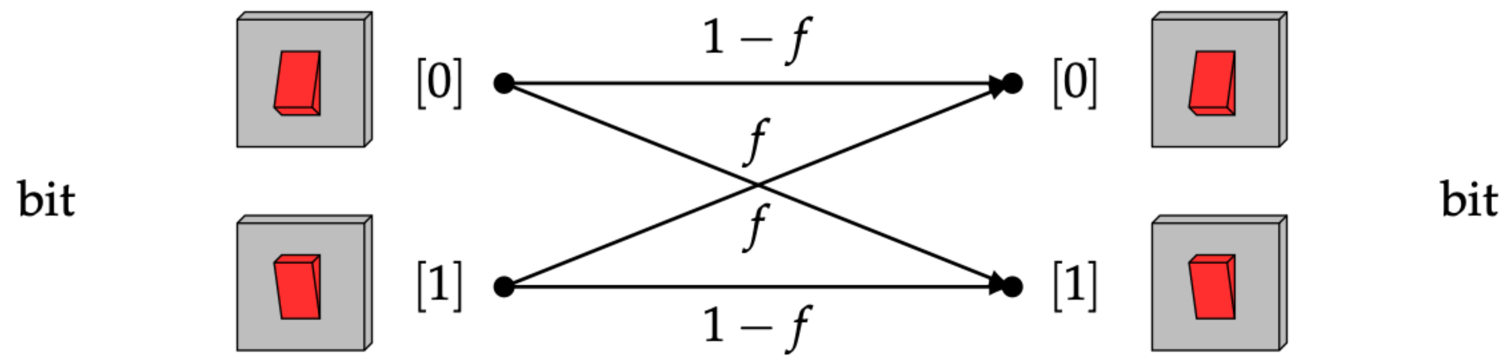


$$\hat{F}(f)[0] = (1-f)[0] + f[1].$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: probabilistischer Flip $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ passiert nichts

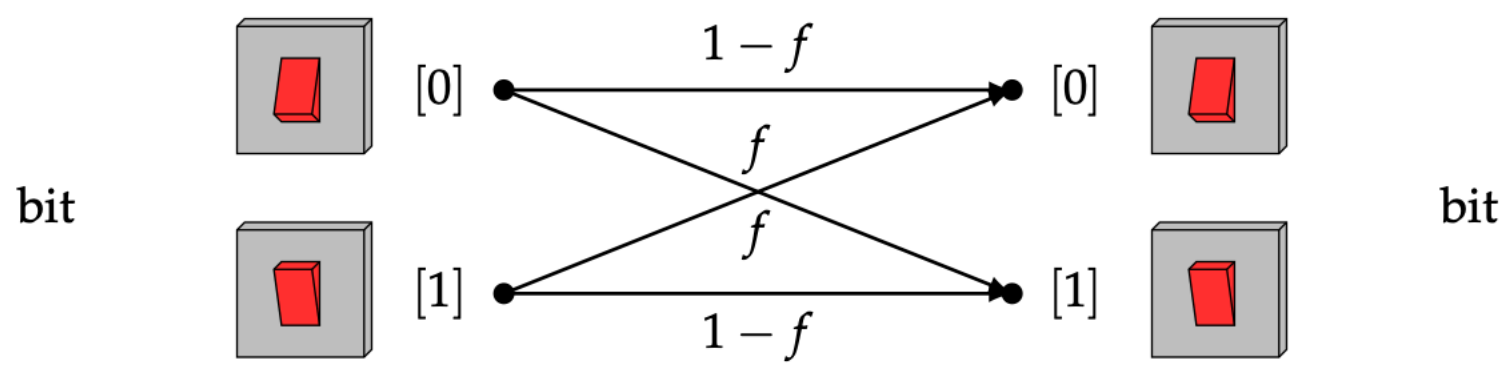


$$\hat{F}(f)[0] = (1-f)[0] + f[1]. \quad \hat{F}(f)[1] = f[0] + (1-f)[1]$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Weiteres Beispiel: probabilistischer Flip $\hat{F}(f)$

Mit Wahrscheinlichkeit f (Flip-Wahrscheinlichkeit) wird das input Bit geflippt, mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ passiert nichts



$$\hat{F}(f)[0] = (1-f)[0] + f[1]. \quad \hat{F}(f)[1] = f[0] + (1-f)[1]$$

Anschaulich: Kissen auf Lichtschalter werfen - mit Wahrscheinlichkeit f getroffen und Licht geht an….

1.2.2 Zufällige Operationen

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.

2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\binom{p}{1-p}$ versetzen?

3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\binom{p_0}{p_1}$ berechnest.

4. Sei $\binom{p_0}{p_1}$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\binom{p_0}{p_1} = \binom{1/2}{1/2}$ gilt.

1.2.2 Zufällige Operationen

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.
2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\binom{p}{1-p}$ versetzen?
3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\binom{p_0}{p_1}$ berechnest.
4. Sei $\binom{p_0}{p_1}$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\binom{p_0}{p_1} = \binom{1/2}{1/2}$ gilt.

$\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$ **führt immer zur Gleichverteilung - so kann man einen fairen Münzwurf simulieren**

1.2.2 Zufällige Operationen

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.
2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\binom{p}{1-p}$ versetzen?
3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\binom{p_0}{p_1}$ berechnest.
4. Sei $\binom{p_0}{p_1}$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\binom{p_0}{p_1} = \binom{1/2}{1/2}$ gilt.

$\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$ **führt immer zur Gleichverteilung - so kann man einen fairen Münzwurf simulieren**

Übungsaufgabe 1.7: Flip durch Reset und NOT

Wie kannst du $F(f)$ aus den $R(r)$ und NOT Operationen bauen?

1.2.2 Zufällige Operationen

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.
2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\binom{p}{1-p}$ versetzen?
3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\binom{p_0}{p_1}$ berechnest.
4. Sei $\binom{p_0}{p_1}$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\binom{p_0}{p_1} = \binom{1/2}{1/2}$ gilt.

$\hat{F}\left(\frac{1}{2}\right)$ **führt immer zur Gleichverteilung - so kann man einen fairen Münzwurf simulieren**

Übungsaufgabe 1.7: Flip durch Reset und NOT

Wie kannst du $F(f)$ aus den $R(r)$ und NOT Operationen bauen?

$$\hat{R}(1-f)\ \widehat{\textbf{NOT}}\ \hat{R}\left(\frac{1-f}{f}\right)$$

1.2.2 Zufällige Operationen

Hausaufgabe 1.3: Schokoladenmünzen

Es ist der 15. Mai und Bob feiert Geburtstag! Da er Schokolade liebt, hat Alice sich entschlossen, ihm eine Schokoladenmünze zu machen. Damit die Münze ganz besonders ist, hat sie die Münze so geformt, dass sie genau mit der Wahrscheinlichkeit $q = 5/15$, die seinem Geburtstag entspricht, auf  landet, wenn man sie zuvor kreiseln lässt. Nach langem ausprobieren hat sie endlich genau die richtige Form gefunden. Aufgeregt lässt sie die Münze auf dem Tisch liegen, um eine Geburtstagskarte zu kaufen.

Als sie zurückkommt, muss sie leider feststellen, dass die Münze in der Sonne lag und eine Kante ein wenig angeschmolzen ist. Durch ausprobieren stellt sie fest, dass die neue Wahrscheinlichkeit von  jetzt $p = 4/15$ ist. Leider hat sie keine Zeit mehr um eine neue Münze zu machen, also schreibt sie in die Geburtstagskarte, dass Bob die Münze nach dem Kreiseln mit Wahrscheinlichkeit f einfach umdrehen soll, damit  genau mit Wahrscheinlichkeit q eintritt. Hilf Alice herauszufinden, welchen Wert f haben sollte.

Hinweis: Die Werte p, q und f sollten folgende Gleichung erfüllen: $F(f)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$.

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$$

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”,

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

$$= \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”, so ändert sich der Zustand zu

$$= [0]$$

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”, so ändert sich der Zustand zu

$$= [0]$$

Das Handheben ist eine Messung

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

 $= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”, so ändert sich der Zustand zu

 $= [0]$

Das Handheben ist eine Messung
Die Messung ändert den Zustand: legt man die Hand wieder über die Münze, dann bleibt der Zustand

 $= [0]$

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wirft man die Münze und hält die Hand darüber, dann kennt man das Ergebnis nicht und bei einer fairen Münze würde man diese Situation mit folgendem Zustand beschreiben

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1].$$

Hebt man die Hand, so findest man ein definitives Ergebnis, z.B. “Kopf”, so ändert sich der Zustand zu

$$= [0]$$

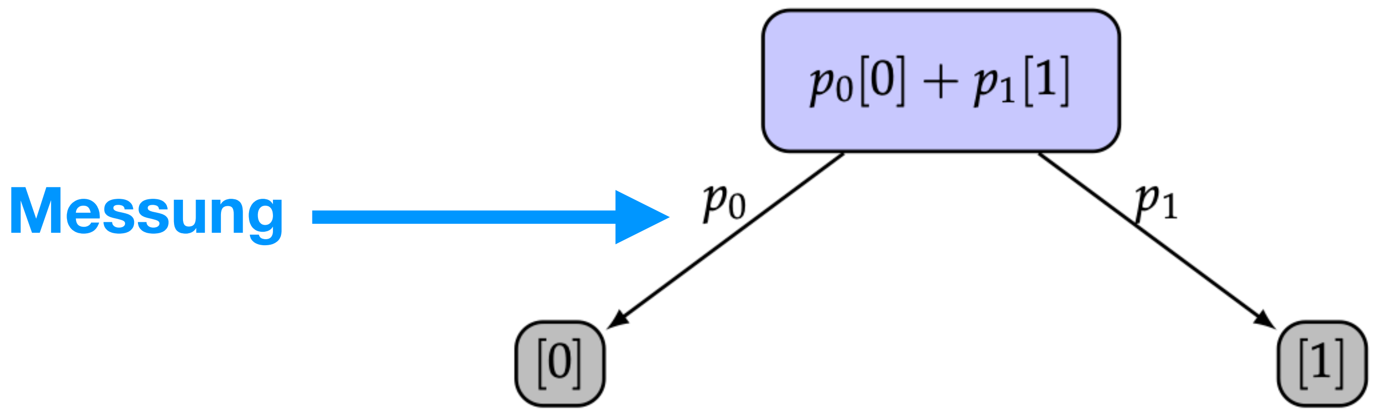
Das Handheben ist eine Messung
Die Messung ändert den Zustand: legt man die Hand wieder über die Münze, dann bleibt der Zustand

$$= [0]$$

Auch bei einer weiteren Messung bleibt der Zustand

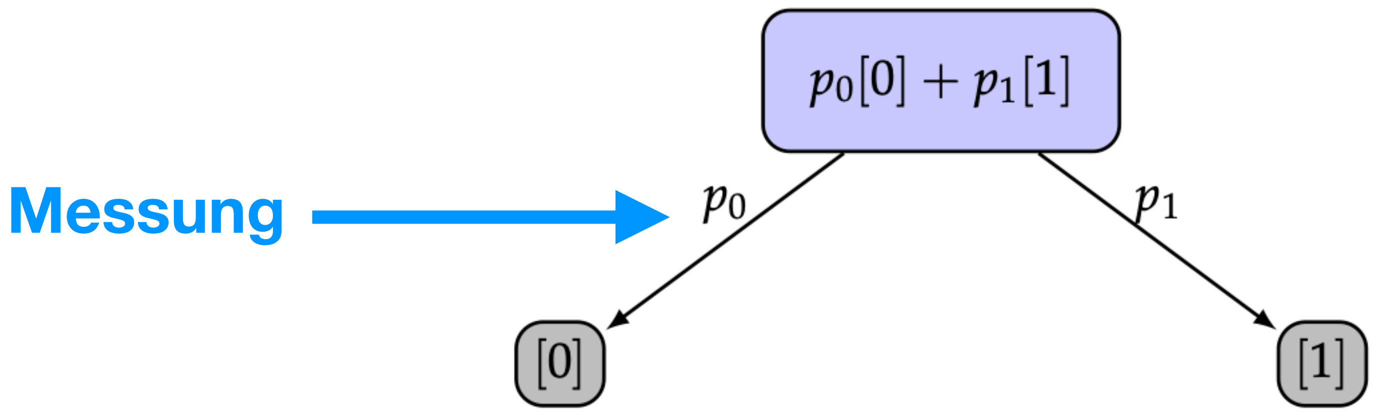
1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ **liefert mit der Wahrscheinlichkeit** p_0 **das Ergebnis** $[0]$ **und mit der Wahrscheinlichkeit** p_1 **das Ergebnis** $[1]$



1.3 Ein probabilistisches Bit messen

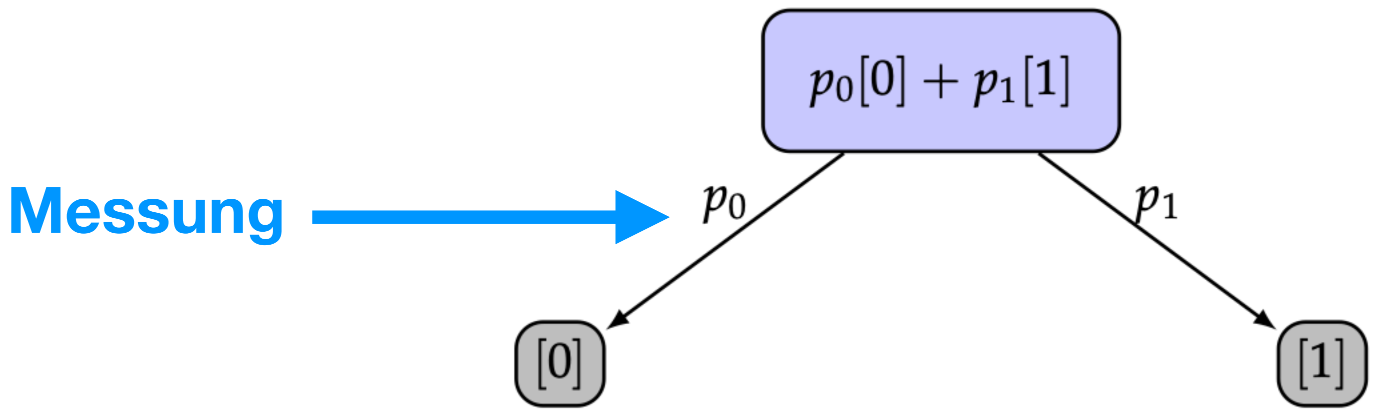
Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ **liefert mit der Wahrscheinlichkeit** p_0 **das Ergebnis** $[0]$ **und mit der Wahrscheinlichkeit** p_1 **das Ergebnis** $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **oder** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

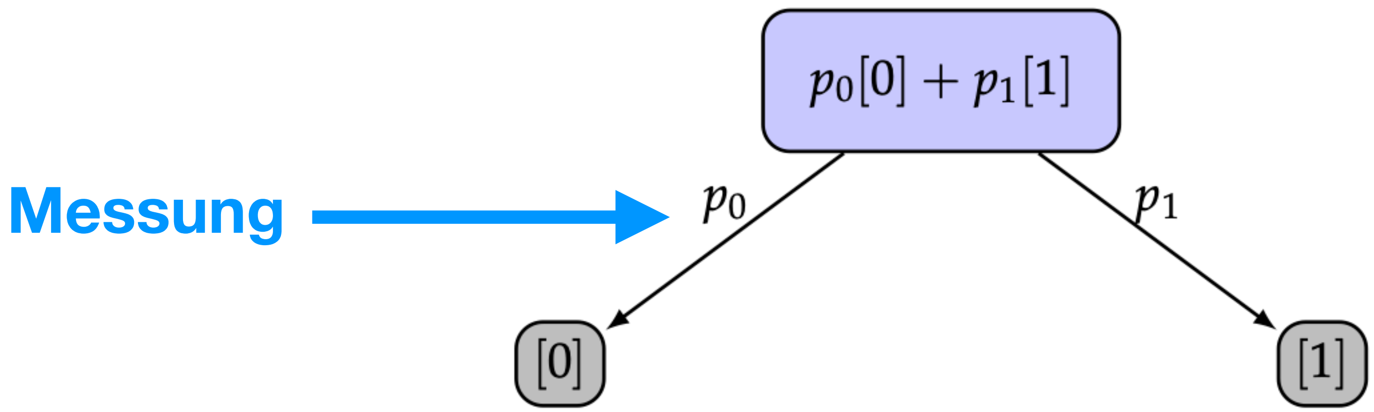
Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ liefert mit der Wahrscheinlichkeit p_0 das Ergebnis $[0]$ und mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

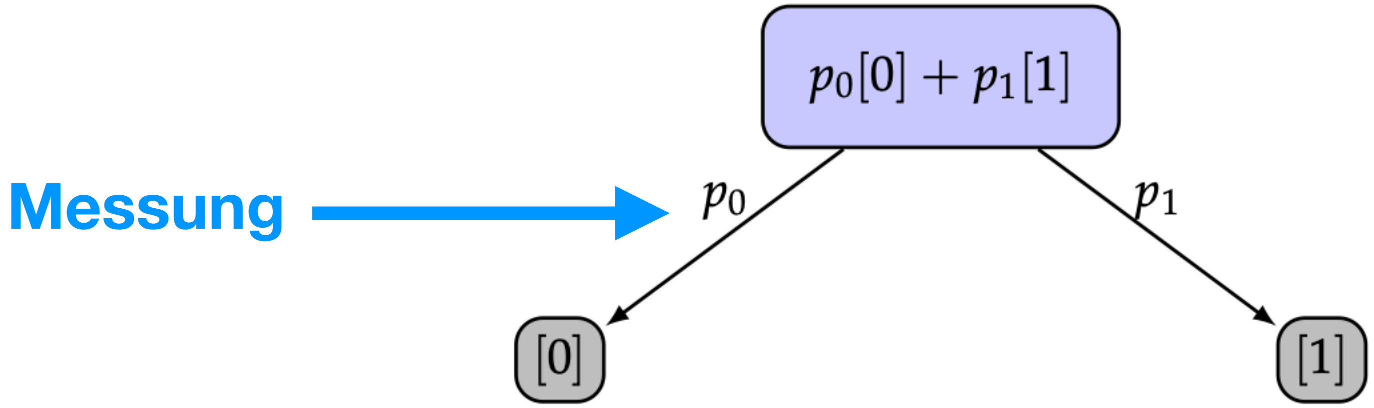
Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ liefert mit der Wahrscheinlichkeit p_0 das Ergebnis $[0]$ und mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**
- **Die Messung liefert nicht die Werte p_0 und p_1**

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

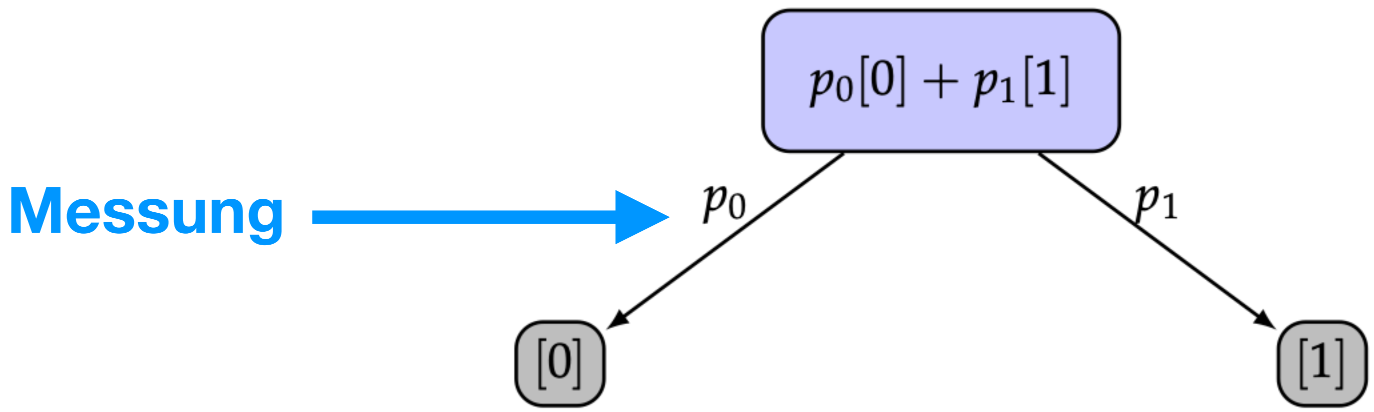
Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ liefert mit der Wahrscheinlichkeit p_0 das Ergebnis $[0]$ und mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**
- **Die Messung liefert nicht die Werte p_0 und p_1**
- **hierzu muss man das System oft (N-mal) kopieren und dann an jedem der vielen Systeme die Messung machen**

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

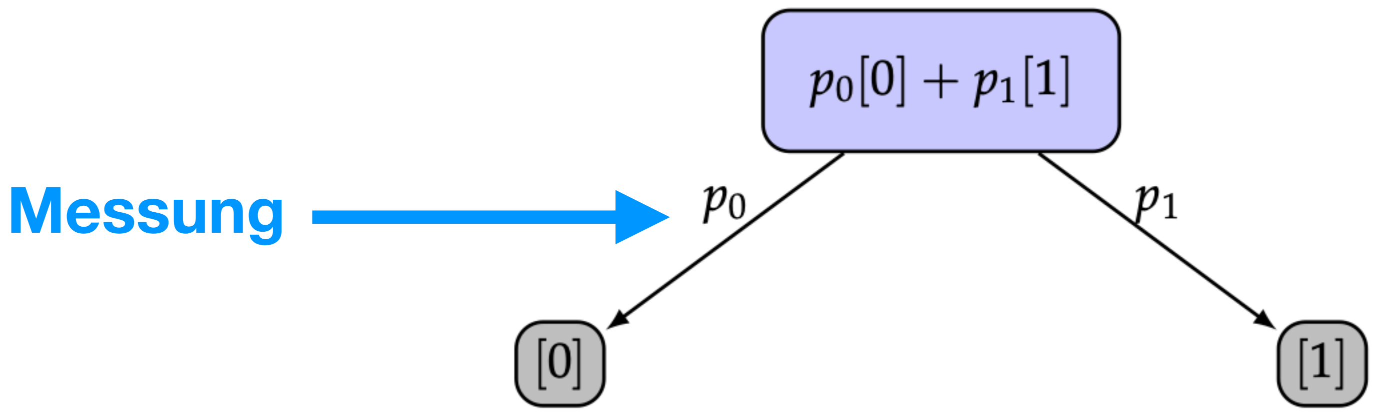
Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ liefert mit der Wahrscheinlichkeit p_0 das Ergebnis $[0]$ und mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**
- **Die Messung liefert nicht die Werte p_0 und p_1**
- **hierzu muss man das System oft (N-mal) kopieren und dann an jedem der vielen Systeme die Messung machen und man erhält N_0-mal das Ergebnis $[0]$ und N_1-mal das Ergebnis $[1]$.**

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Die Messung eines probabilistischen Bits $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ liefert mit der Wahrscheinlichkeit p_0 das Ergebnis $[0]$ und mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis $[1]$



- **Nach der Messung bleibt das Bit dann im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**
- **Die erste Messung ändert also im Allgemeinen den Zustand!**
- **Die Messung liefert nicht die Werte p_0 und p_1**
- **hierzu muss man das System oft (N-mal) kopieren und dann an jedem der vielen Systeme die Messung machen und man erhält N_0-mal das Ergebnis $[0]$ und N_1-mal das Ergebnis $[1]$. Es gilt dann $p_0 = \lim_{N \to \infty} \frac{N_0}{N}$ und $p_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{N_1}{N}$**

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Hausaufgabe 1.4: Münzen werfen

1. Nimm dir eine Münze und markiere die Seiten mit 0 und 1. Wirf die Münze 30 mal und dokumentiere die Ergebnisse in einer Tabelle der folgenden Form:

Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	1	…	1

(Die grauen Ergebnisse sind nur Beispiele, ersetze sie mit deinen Ergebnissen.)

2. Schätze mit Gl. (1.19) die Wahrscheinlichkeit, mit der deine Münze auf der mit 1 markierten Seite landet.

3. Es ist interessant zu sehen, wie sich diese Schätzung verändert, je höher die Zahl der Würfe N steigt. Um das anschaulich zu machen, erweitere deine Tabelle aus Aufgabe 1 um drei weitere Zeilen, sodass sie wie folgt aussieht:

Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	…	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	…	1
Summe N_1	1	1	2	2	2	2	3	4	…	16
Anteil N_1/N	1	1/2	2/3	2/4	2/5	2/6	3/7	4/8	…	16/30
Wert des Bruchs	1.00	0.50	0.67	0.50	0.40	0.33	0.43	0.50	…	0.53

Die Zeilen haben dann folgende Bedeutung: (1) Anzahl N der Würfe bisher, (2) Ergebnis des N-ten Wurfs, (3) Summe der ersten N Würfe, (4) Schätzung der Wahrscheinlichkeit für Ergebnis 1 basiert auf den ersten N Messungen, (5) Dezimaldarstellung der Schätzung. Wenn du möchtest, kannst du *Excel* oder ein ähnliches Programm nutzen

4. Zeichne einen Graphen der letzte Zeile der Tabelle als eine Funktion der Anzahl der Würfe N.

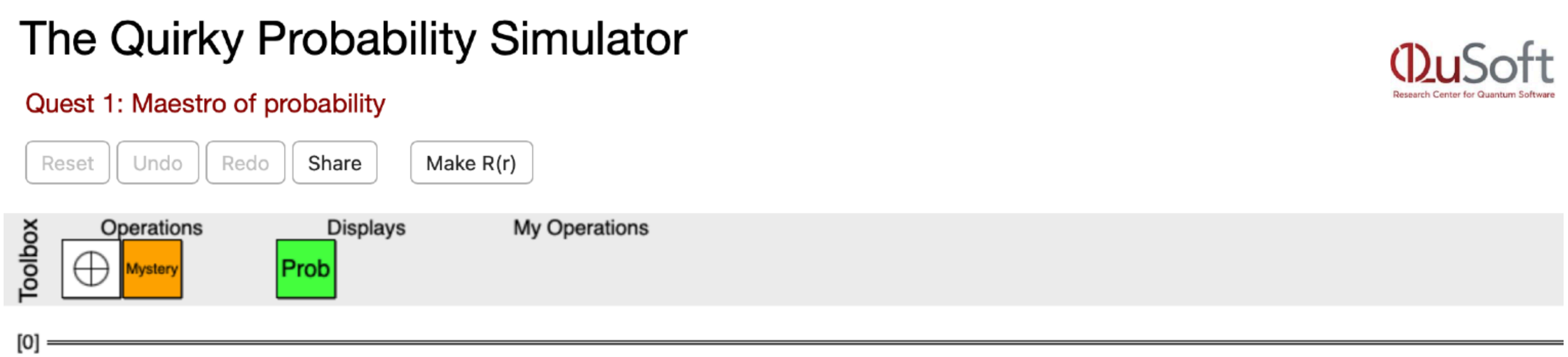
1.4 Der Quirky Simulator

`https://www.quantum-quest.org/quirky`

-> Quest 1

1.4 Der Quirky Simulator

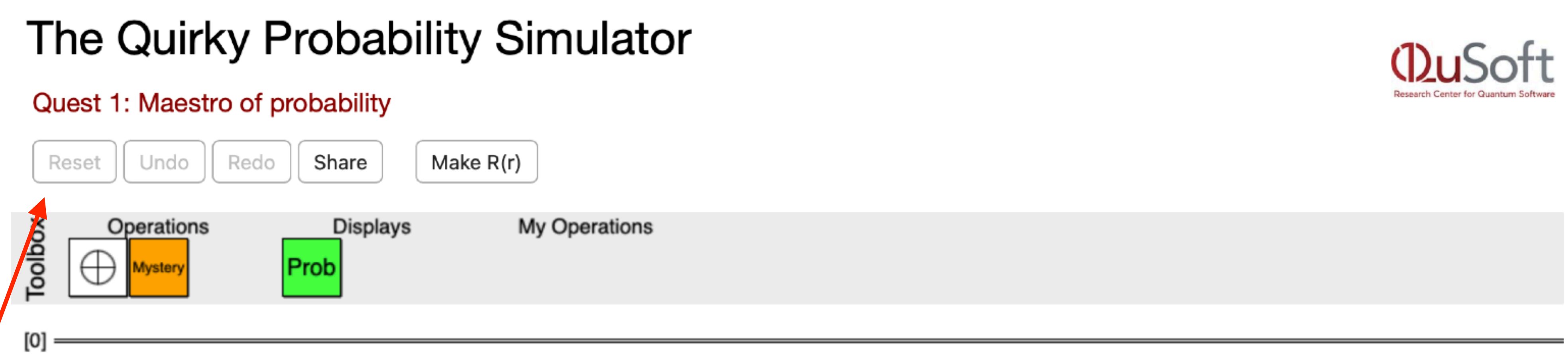
`https://www.quantum-quest.org/quirky`



This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky

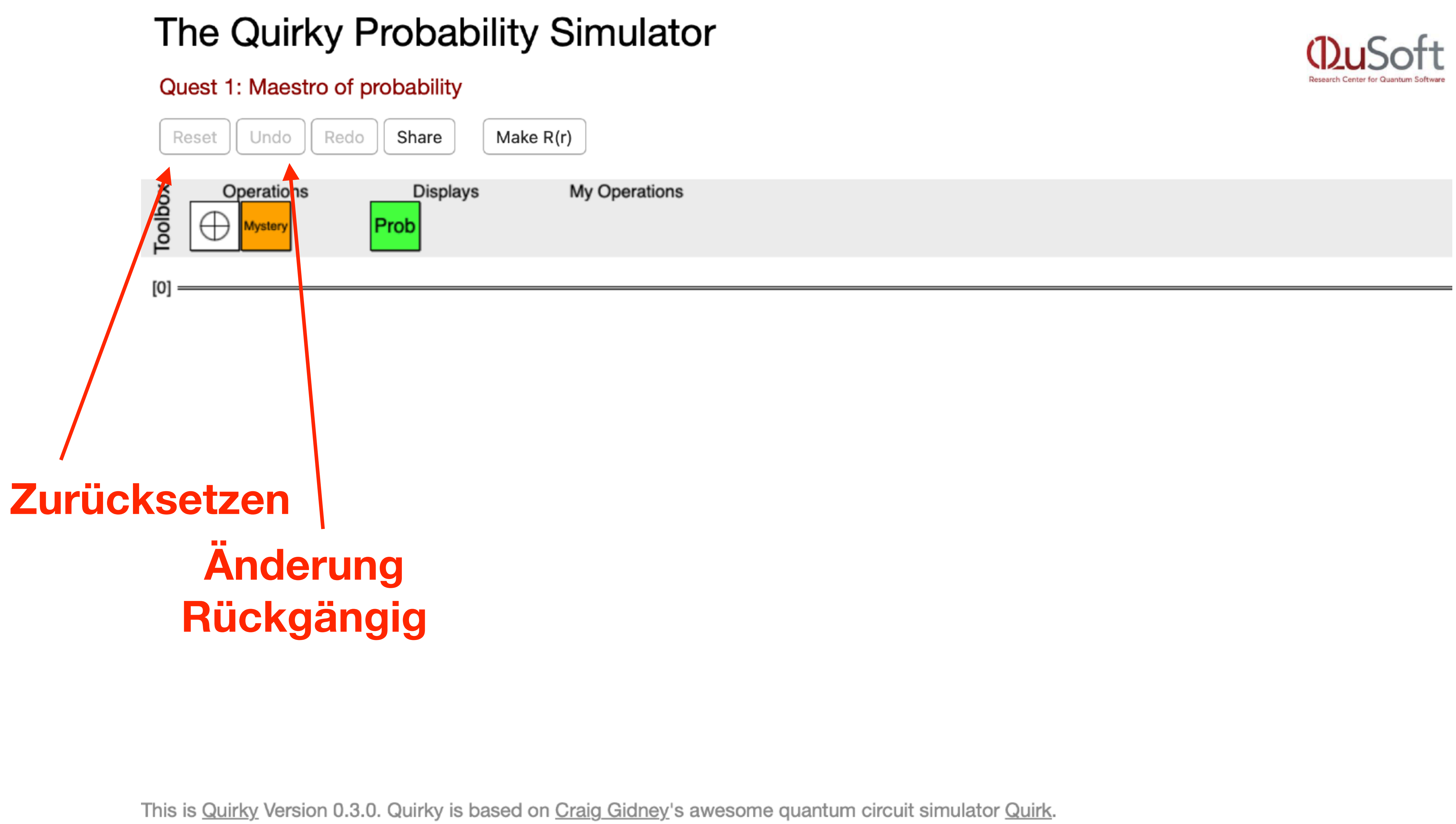


Zurücksetzen

This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

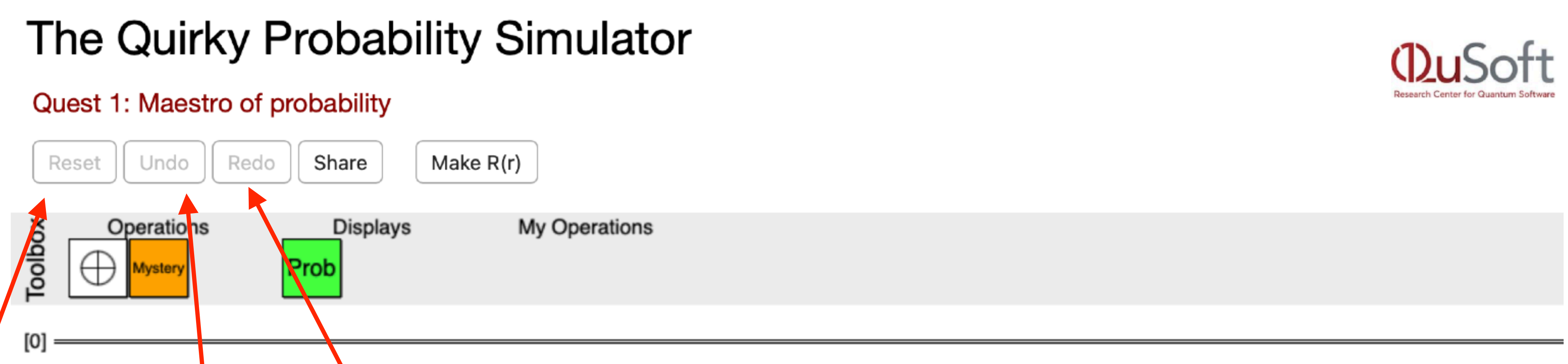
1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Zurücksetzen

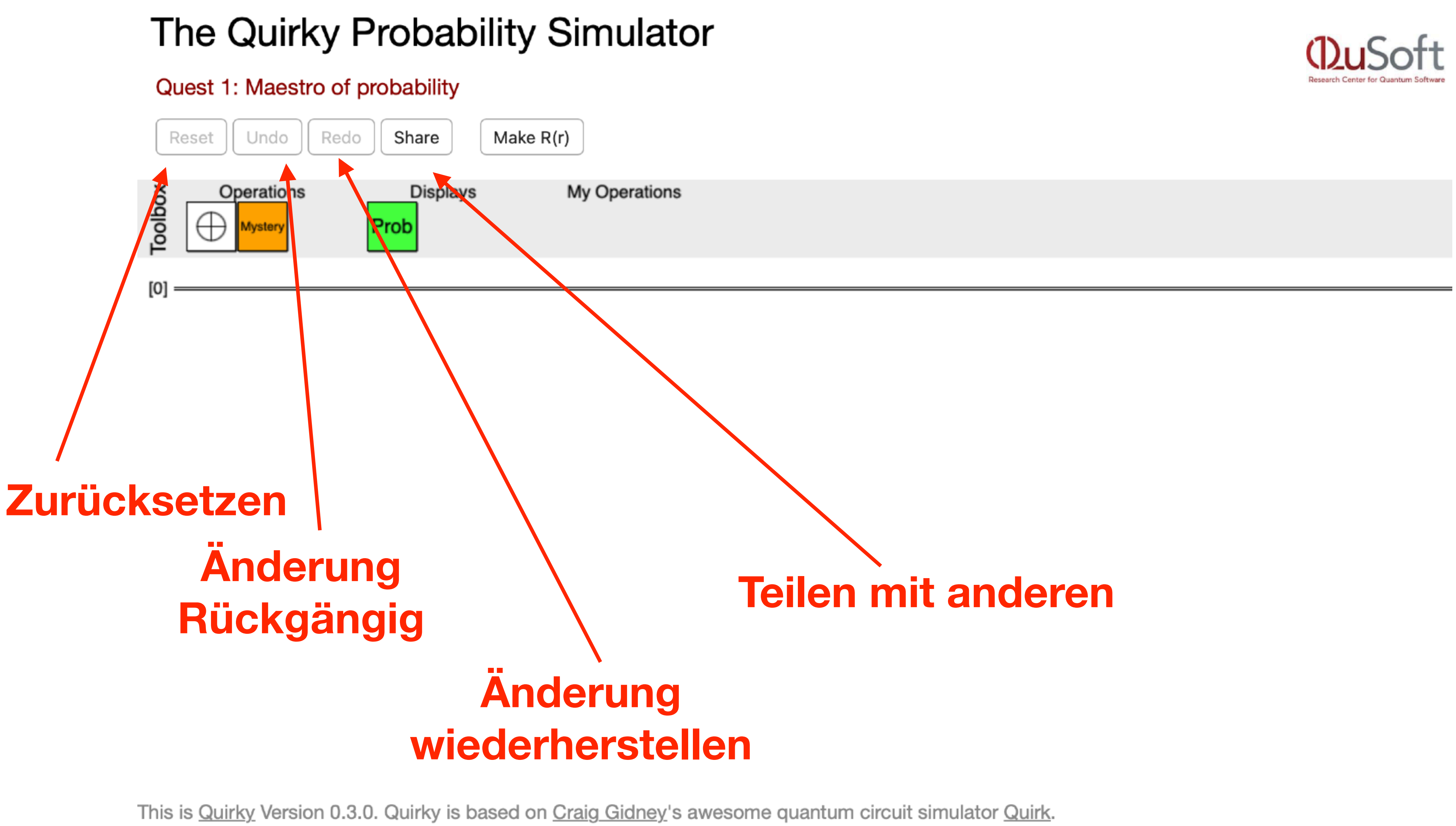
Änderung Rückgängig

Änderung wiederherstellen

This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

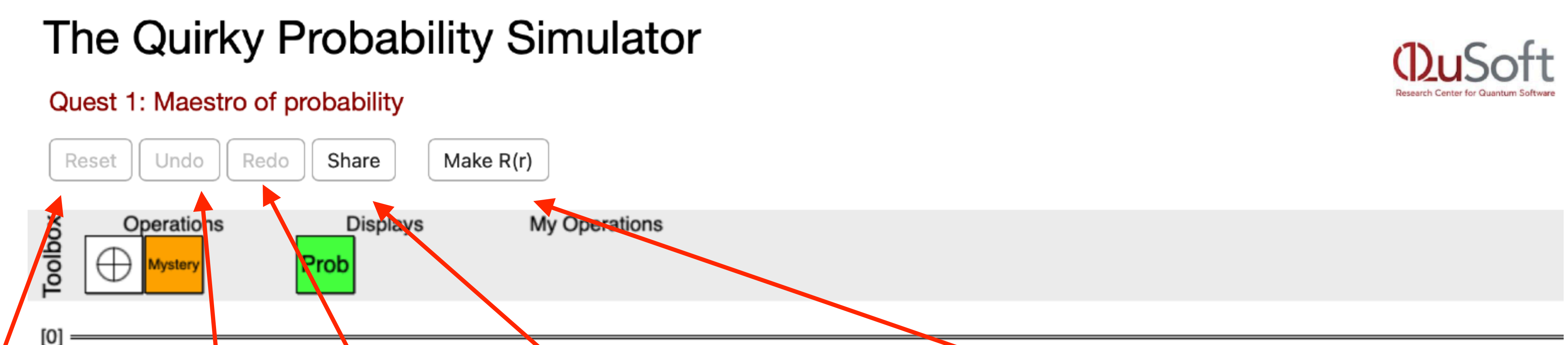
1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Erstellt die Operation $\hat{R}(r)$
Man muss r eingeben

Zurücksetzen

Änderung Rückgängig

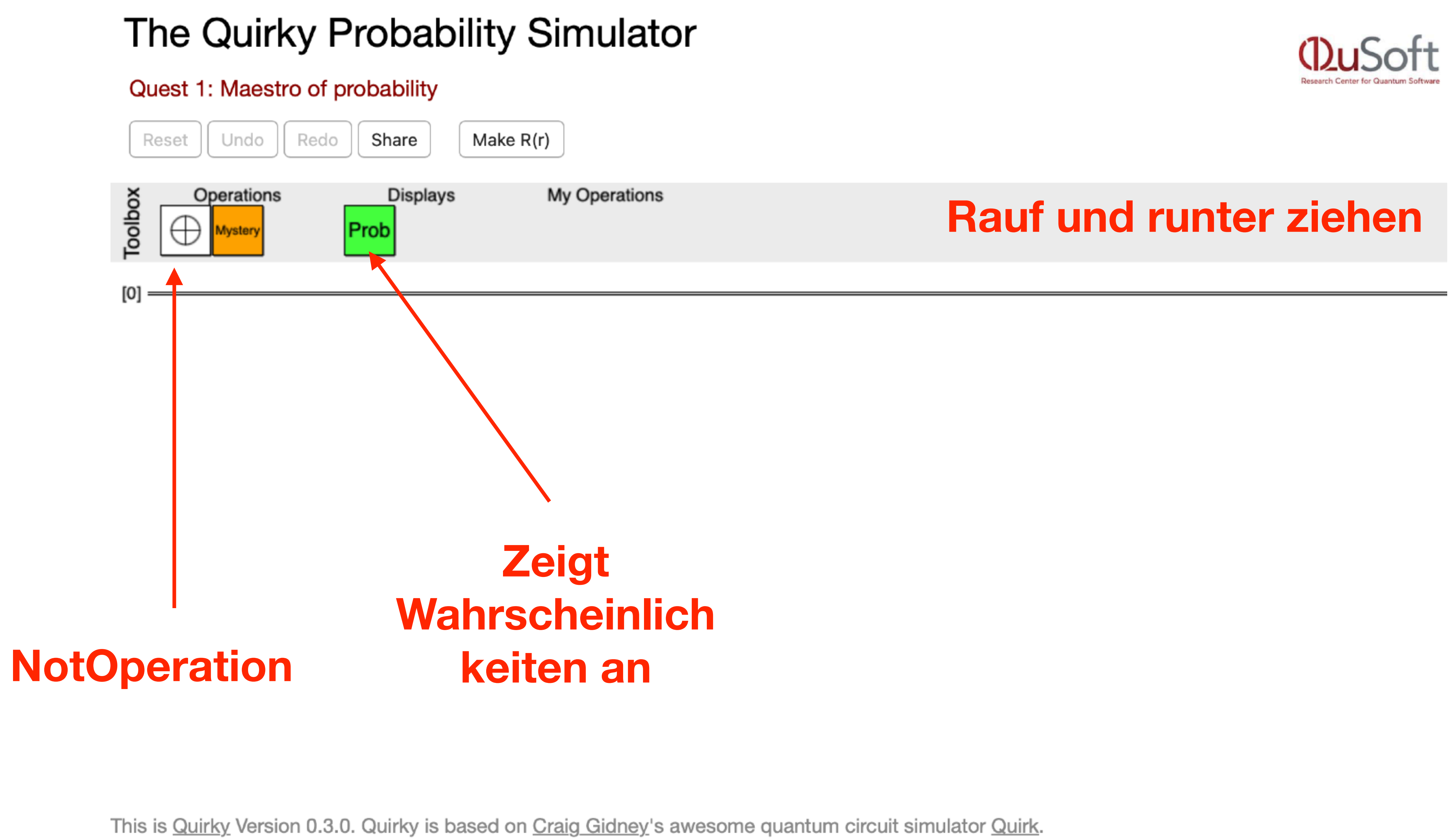
Teilen mit anderen

Änderung wiederherstellen

This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



1.4 Der Quirky Simulator

`https://www.quantum-quest.org/quirky`

Estelle $\hat{R}(1/2)$

Was kommt dabei raus?

1.4 Der Quirky Simulator

`https://www.quantum-quest.org/quirky`

Estelle $\hat{R}(1/2)$
Was kommt dabei raus?

$$R(1/2)\,[1] = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}.$$

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky

Estelle $\hat{R}(1/2)$
Was kommt dabei raus?

$$R(1/2)\,[1] = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}.$$

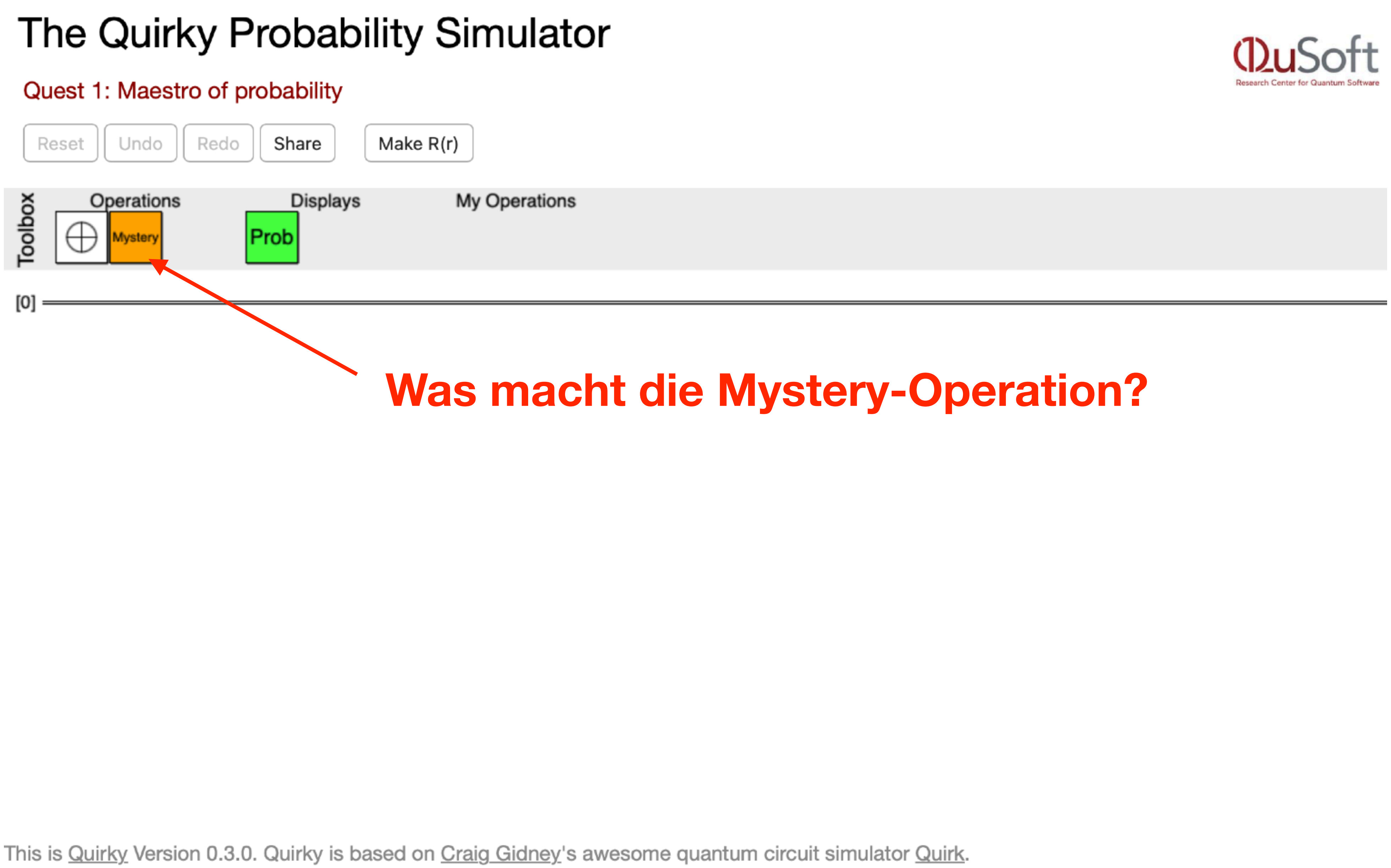
Hausaufgabe 1.5: Zweimal Resetten

1. Baue die folgende Sequenz von Operationen in QUIRKY: Generiere zuerst den Zustand [1], resette dann mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{1}{4}$ und resette anschließend mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{2}{3}$. Nutze das Tool zum Anzeigen von Wahrscheinlichkeiten um die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse herauszufinden.

2. Zeige, dass die Antwort aus QUIRKY korrekt ist.

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Was macht die Mystery-Operation?

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky

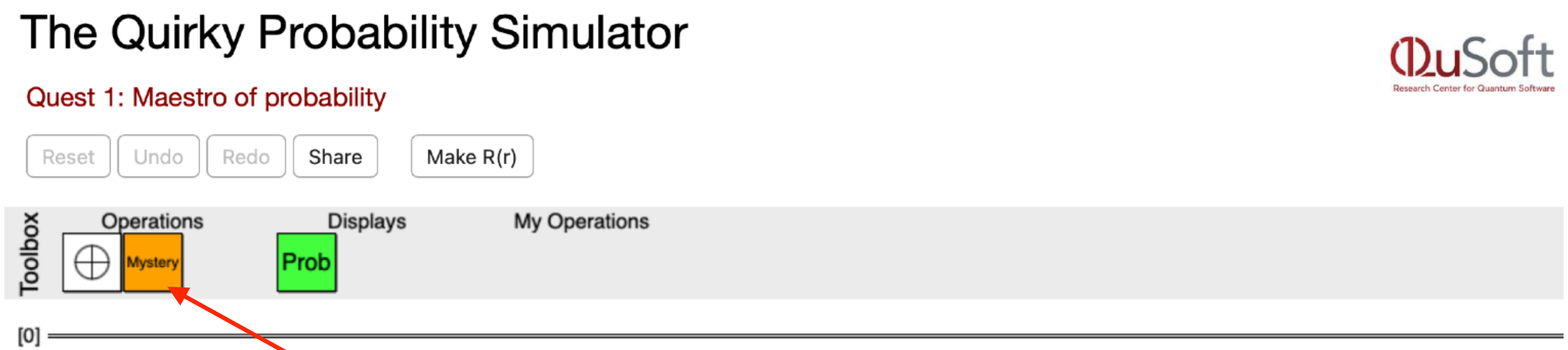
Was macht die Mystery-Operation?

$$M\,[0] = 0.2\,[0] + 0.8\,[1].$$

This is Quirky Version 0.3.0. Quirky is based on Craig Gidney's awesome quantum circuit simulator Quirk.

1.4 Der Quirky Simulator

https://www.quantum-quest.org/quirky



Was macht die Mystery-Operation?

$$M\,[0] = 0.2\,[0] + 0.8\,[1].$$

Hausaufgabe 1.6: Zeit für ein Mysterium

1. Bestimme den Zustand $M\,[1]$
2. Bestimmen $M\,[0]$ und $M\,[1]$ die zufällige Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für $M\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ auf und überprüfe sie mit QUIRKY. Falls nicht, erkläre wieso.