

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation

Berechnen Sie jeweils die Matrix $C = A \cdot B$.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Matrizen und Determinanten

a) Berechnen Sie $A + B$, AB und BA mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die zugehörigen Determinanten

$$\det A, \quad \det B, \quad \det(A + B), \quad \det(AB), \quad \det(BA).$$

Aufgabe 3: Matricelemente

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bzw.

$$\vec{e}_1^T = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{e}_2^T = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{e}_3^T = (0, 0, 1).$$

a) Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$\vec{e}_1^T A \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_3^T A \vec{e}_1 ,$$

und verallgemeinern Sie auf $\vec{e}_i^T A \vec{e}_j$, mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

b) Berechnen Sie die Matrizen

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1^T \quad , \quad \vec{e}_2 \vec{e}_2^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \vec{e}_i^T = \vec{e}_1 \vec{e}_1^T + \vec{e}_2 \vec{e}_2^T + \vec{e}_3 \vec{e}_3^T$$

c) Was sind

$$\vec{e}_1^T A \quad , \quad \vec{e}_2^T A \quad , \quad \vec{e}_3^T A ?$$

Aufgabe 4: Drehmatrizen

Die folgenden drei Matrizen drehen einen 3-dimensionalen Vektor um die x , y , und z Achse:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suchen Sie sich eine Matrix R_i aus und berechnen Sie

$$R_i^T R_i \quad , \quad R_i R_i^T .$$

Fortgeschrittene Aufgaben für Profis und solche, die es werden wollen

Aufgabe 5: Der Kommutator

Wir definieren die folgenden 3 Matrizen:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie $T_1 \cdot T_2 - T_2 \cdot T_1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_3 .
- b) Berechnen Sie $T_2 \cdot T_3 - T_3 \cdot T_2$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_1 .
- c) Berechnen Sie $T_3 \cdot T_1 - T_1 \cdot T_3$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_2 .

Aufgabe 6: Matrizen und Determinanten

- a) Berechnen Sie $A + B$, AB und BA mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie die zugehörigen Determinanten

$$\det A, \quad \det B, \quad \det(A + B), \quad \det(AB), \quad \det(BA).$$

- c) Zeigen Sie für allgemeine 2×2 Matrizen, dass die Vermutungen, die Sie haben, richtig sind. Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{und ähnlich für } B.$$