

Aufgabe 1: Die Komplexe Ebene

Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Ebene ein. Bestimmen Sie dann die komplex-konjugierte Zahl und tragen Sie diese ebenfalls ein. Berechnen Sie den Absolutbetrag der Zahl, bzw ihrer komplex-konjugierten Zahl.

- a) $1 + i$
- b) $1 - i\sqrt{3}$
- c) $2i - 2$
- d) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$
- e) $4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
- f) $r (\cos \phi + i \sin \phi) \quad , \quad r = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \phi \in [0, \pi]$

Aufgabe 2: Komplexe Algebra

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie das Ergebnis als Real- und Imaginärteil an.

- a) $(1 + i)^2$
- b) $(i + \sqrt{3})^2$
- c) $\frac{2 + i}{3 - i}$
- d) $\left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2$

Aufgabe 3: Komplexwertige Funktionen

- a) Sei $f(z) = z^2 - 2z + 1$. Was ist $f(1 - i)$?
- b) Sei $f(z) = z^2 - 2z + 1$. Was ist $f(i - 2)$?
- c) Sei $f(z) = z^2 + 3z + 3$. Was sind die Nullstellen von f in der komplexen Ebene?

Aufgabe 4:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung an.

$$(a) -5 \quad , \quad (b) -5i \quad , \quad (c) 1 + \sqrt{3}i \quad , \quad (d) \sqrt{3} + i \quad , \quad (e) -3 + 3i$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\exp(i\varphi)$ mit

$$(a) \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad , \quad (b) \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad , \quad (c) \varphi = \frac{3}{4}\pi \quad , \quad (d) \varphi = \frac{7}{6}\pi \quad , \quad (e) \varphi = 5\pi$$

Aufgabe 6:

Benutzen Sie die Polarform $z = re^{i\phi}$ um folgende Aufgaben in Real- und Imaginärteil darzustellen.

- a) $e^{-i\pi/4}$
- b) $(1 - i)^8$
- c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{i - 1}\right)^{10}$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie jeweils eine nicht-reelle Lösung der Gleichung für $z \in \mathbb{C}$.

$$(a) z^2 = i \quad , \quad (b) z^3 = -1 \quad , \quad (c) z^4 = 16 \quad , \quad (d) z^6 = 1$$

Aufgabe 8:

Geben Sie je eine Formel für den Real- und Imaginärteil von $(1 - i)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an, in der ausschließlich reelle Zahlen auftreten. Wie beweisen Sie diese?

Aufgabe 9: Etwas Knobeliges.

Sei $w \in \mathbb{C}$. Man zeige:

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = \frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re} w)$ und $y^2 = \frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re} w)$ sowie $x, y \geq 0$, so wird die Gleichung $z^2 = w$ im Fall $\operatorname{Im} w \geq 0$ von $z = x + iy$ und andernfalls von $z = x - iy$ gelöst.